DFE11

Océan Bleu
Dynamique des Fluides Géophysiques

Compléments pour les projets :

- Les termes de friction
- La couche d'Ekman et le transport d'Ekman
- Le transport de Sverdrup
- Courant de bord Ouest
- Instabilité barotrope

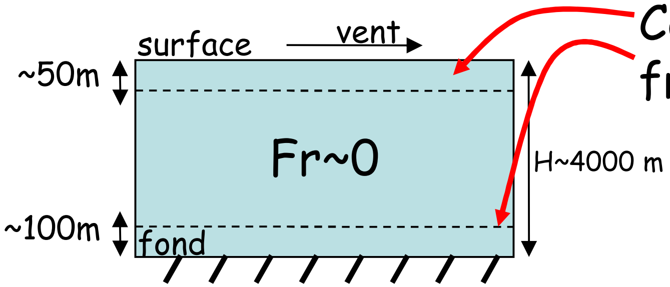
Laurent.Mortier@ensta-paris.fr

Equations fondamentales de la dynamique

Conservation de la quantité de mouvement pour une particule de fluide de densité ρ:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \underbrace{2\vec{\Omega}\times\vec{u}}_{\text{Force de coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}}_{\text{Force centrifuge}} = \underbrace{-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}}_{\text{Gradient de pression}} + \underbrace{Grav}_{\text{gravitation}} + \underbrace{Fr}_{\text{Friction}}$$

Dans le cadre de ce cours: on considère les mouvements de fluide « loin des frontières physiques » du fluide (fond/ surface de la mer, surface pour l'atmosphère) => en dehors des couches limites où la friction intervient: Fr=0



Couches limites frictionnelles

Mais c'est dans ces couches, que les sources/puits de qdm sont les plus importants ! Comment les prendre en compte ??

Les termes de friction

On sépare les termes de friction en composante horizontale et composante verticale.

La viscosité (cinématique) est la viscosité moléculaire ou bien représente une paramétrisation de la turbulence. Elle est variable et dépend le plus souvent des variables d'état (micro ou macro) du système (u, v, T, …).

$$Fr = Fr_h + Fr_v = \partial_x \nu_h \partial_x u + \partial_y \nu_h \partial_y u + \partial_z \nu_v \partial_z u$$

NB : Dans le code, le terme Fr_h est calculé par
Laplacien(U) = grad(div U) – rot(rot U)
Voir la routine qdmdiff dans step.F90

Il faut aussi définir les conditions aux limites. Pour l'océan par exemple,

- à la surface : $\nu_v \partial_z u = \tau_x / \rho_0, \quad \tau_x$ la tension de vent selon x
- au fond : U = 0 (frottement) ou U.n = 0 (glissement, n, la normale au fond)

Le terme de friction verticale

Dans un fluide représenté par la superposition de couches homogènes, on a

$$Fr_v = \frac{1}{h_i}\int_a^b \partial_z \nu_v \partial_z u dz = \frac{1}{h_i}\left[\nu_v \partial_z u\right]_a^b$$

Si une seule couche en gravité réduite, <u>avec un frottement linéaire entre les 2 couches</u>, on a

$$\boxed{Fr_v = \frac{\tau_x}{h\rho_0} - \frac{\lambda u}{h}}$$

comme dans le modèle numérique

En supposant que le gradient de pression est nul et que R_{oT} est petit, on a simplement

$$-fv = \frac{1}{h}(\tau_x / \rho_0 - \lambda u)$$

$$fu = \frac{1}{h}(\tau_y / \rho_0 - \lambda v)$$

et donc si on néglige le frottement au fond ou à l'interface

$$\vec{U}.\vec{\tau} = 0$$

Le transport est ⊥ au vent, à droite dans l'hémisphère Nord

La couche d'Ekman de surface

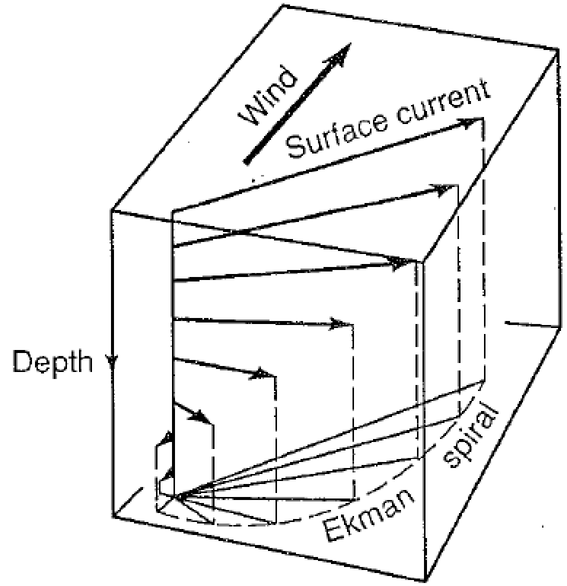
Dans un fluide stratifié qui dépend de z, en posant U = u+iv, on a

$$\upsilon \partial_{zz}^2 U + i f U = 0$$

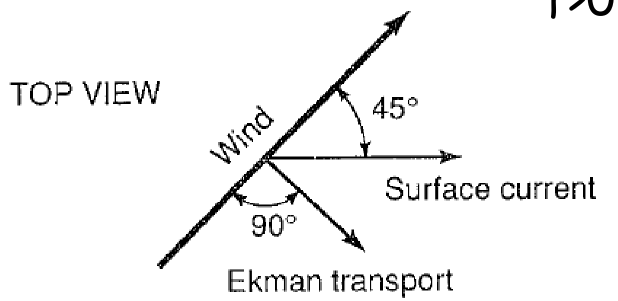
on calcule facilement

$$U(z) = U(0) e^{(1-i)z/d}$$

avec $\boxed{d = \sqrt{\dfrac{2\upsilon}{f}}}$ l'épaisseur de la couche d'Ekman



f>0



et

$$U(0) = \frac{\sqrt{2}}{\rho_0 f d} \mathrm{T}(1+i)$$

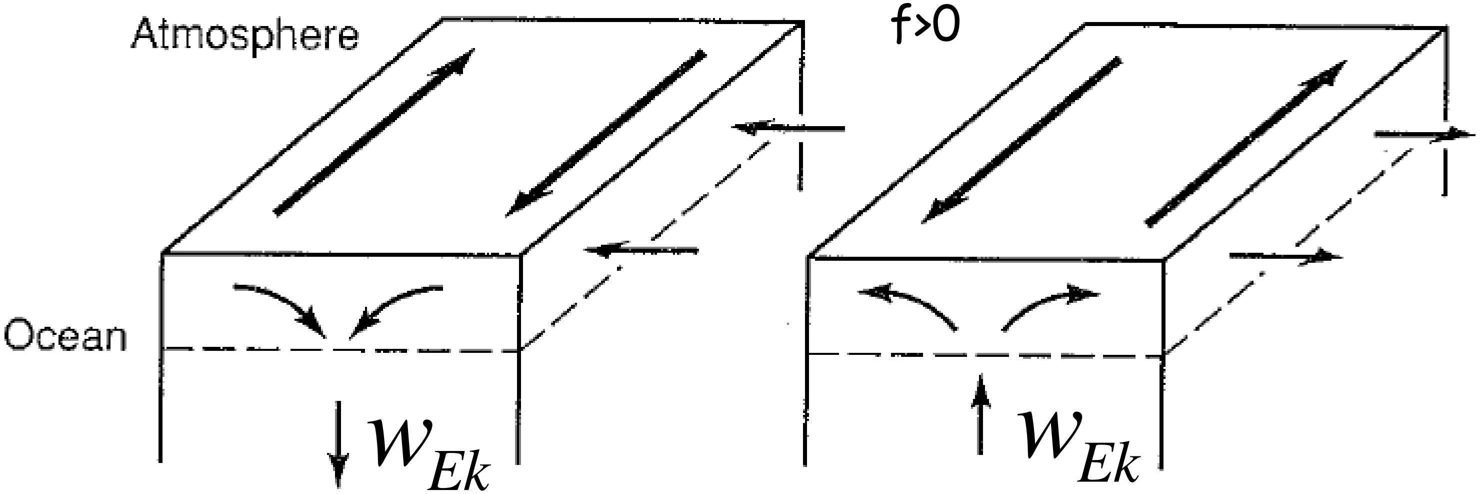
avec

$$\mathrm{T} = \tau_x + i\tau_y$$

Le pompage d'Ekman

On calcule la divergence du transport d'Ekman (f constant)

$$\int_{-\infty}^{0} (\partial_x u + \partial_y v)\,dz = -(\cancel{w_{surf}} - w_{Ek}) = \frac{1}{f\rho_o}(\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x)$$



w_{Ek} est comme une vitesse verticale qui s'exerce à la surface sur l'océan intérieur, qui est celui qu'on modélise. C'est le pompage d'Ekman. Il faut que le vent ait un rotationnel non nul. Il ne dépend pas de la viscosité.

Le transport de Sverdrup

$$\left.\begin{aligned} -(f_0+\beta_0 y)v &= -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x} \\ +(f_0+\beta_0 y)u &= -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow +(f_0+\beta_0 y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta_0 v = 0$$

et avec $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \Rightarrow \boxed{f\frac{\partial w}{\partial z}=\beta_0 v}$$

Si les colonnes de fluides sont étirées, soit $\partial_z w>0$ (resp. compressées, soit $\partial_z w<0$), elles doivent nécessairement se déplacer vers le Nord (resp. le Sud).

C'est le transport de Sverdrup.

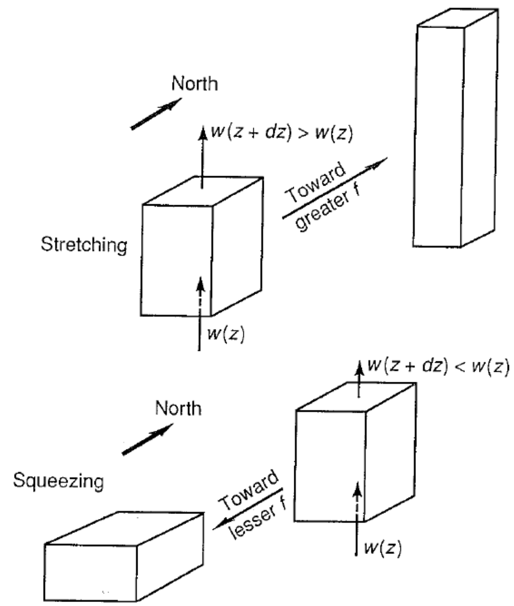
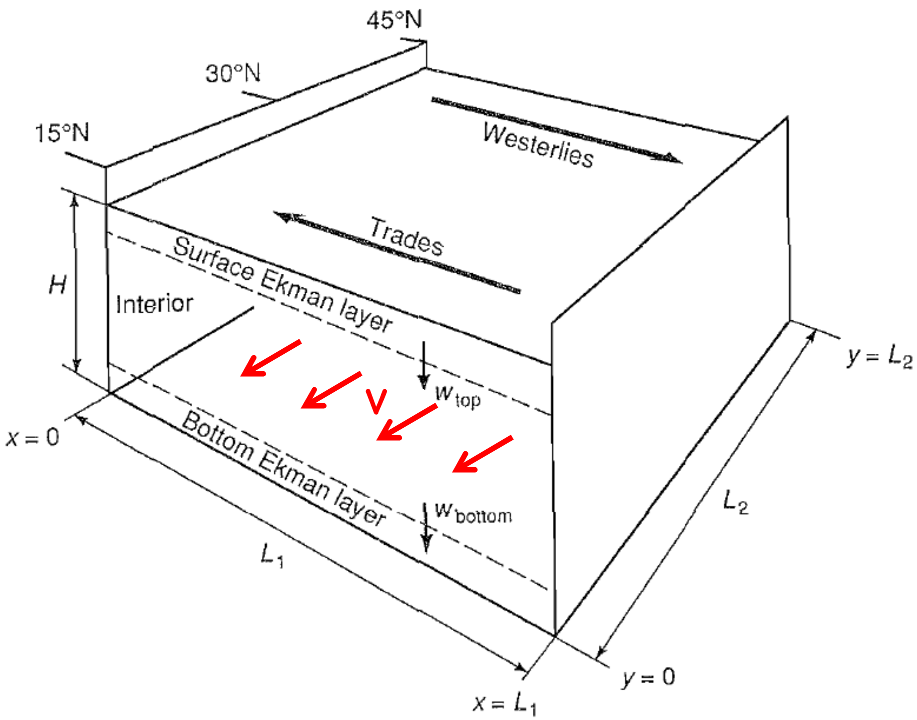


Figure 8-2 Meridional migration of fluid parcels induced by vertical stretching or squeezing in the large-scale oceanic circulation.

Courant de bord Ouest

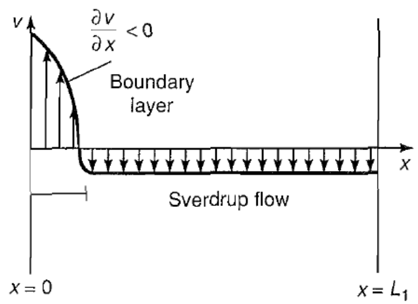
Dans un océan homogène, cet étirement (compression) est exercé par le pompage d'Ekman dans les 2 couches frictionnelles en surface et au fond (ou à l'interface entre couches)

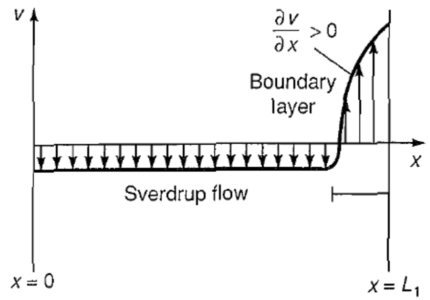
$$\beta_O v = f\,\frac{w_{Ek}^{surf} - w_{Ek}^{fond}}{H} = \frac{1}{\rho_o H}(\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x) - \frac{d\,f}{2H}(\partial_x v - \partial_y u)$$



Conservation de la masse

Besoin d'une couche limite latérale





A gauche (GS) ?

ou à droite ?

Bord Ouest ou bord Est ?

Dans la ou les couches limites latérales où se fait le courant de retour, il faut inclure un terme de friction horizontale ou verticale. Dans le modèle numérique, les deux possibilités existent. On a

Modèle de Stommel

$$\beta_O v = \cancel{\frac{1}{\rho_o H}(\partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x)} + \upsilon\Delta(\partial_x v - \cancel{\partial_y u}) - \frac{\lambda}{H}(\partial_x v - \cancel{\partial_y u})$$

Modèle de Munk

avec les conditions aux limites $\partial_x v = 0$ ou $v = 0$ à x=0 et x=L

En intégrant dans la couche limite, le terme de gauche est toujours strictement positif et le terme de droite, vaut

$$\left[\upsilon\partial_x\partial_x v\right]_0^\infty - \frac{\lambda}{H}\left[v\right]_0^\infty \approx -\upsilon\partial_x\partial_x v(0) + \frac{\lambda}{H}v(0) \quad \text{sur le bord Ouest}$$

$$\left[\upsilon\partial_x\partial_x v\right]_\infty^L - \frac{\lambda}{H}\left[v\right]_\infty^L \approx +\upsilon\partial_x\partial_x v(L) - \frac{\lambda}{H}v(L) \quad \text{sur le bord Est}$$

La seule possibilité d'avoir une quantité >0 est sur le bord Ouest.

Bord Est ?

Modèle de Stommel

$$\left[\upsilon\partial_x\partial_x v\right]_\infty^L - \frac{\lambda}{H}\left[v\right]_\infty^L \approx +\upsilon\partial_x\partial_x v(L) - \frac{\lambda}{H}v(L)$$

Modèle de Munk

avec les conditions aux limites $\zeta = \partial_x v = 0$ ou $v = 0$ en x=L.

<u>Modèle de Stommel :</u>

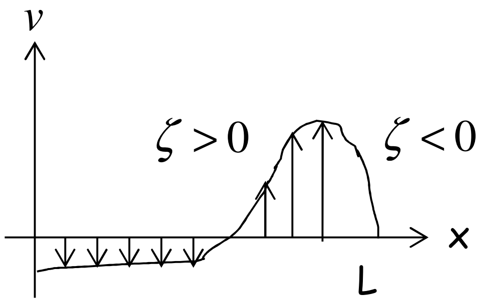
1 - $v(L) = 0$: pas de compensation du terme de gauche qui est > 0

2 - $\partial_x v(L) = 0$: alors v>0 et pas de compensation possible

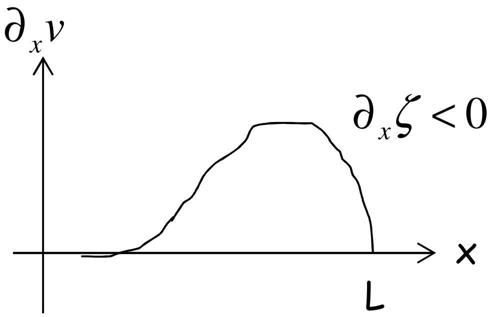
<u>Modèle de Munk :</u>

1 - $v(L) = 0$: alors nécessairement $\partial_x v(L) < 0$ et $\partial^2_{xx} v(L) < 0$ et pas de comp.

2 - $\partial_x v(L) = 0$: alors $\partial^2_{xx} v(L) < 0$ et pas de compensation possible



Cas 1

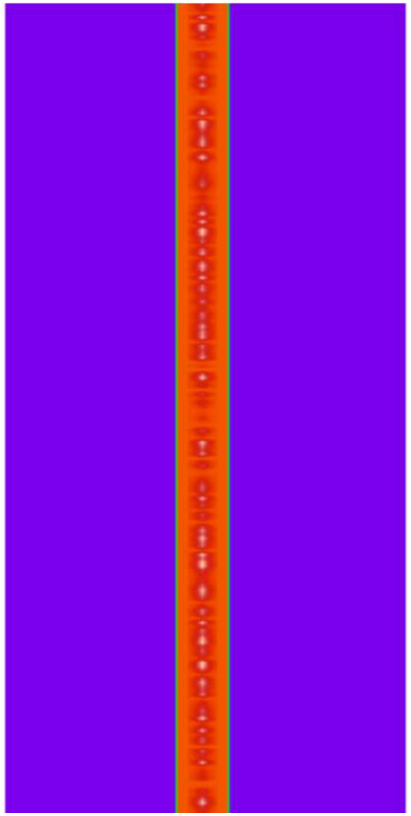


Cas 2

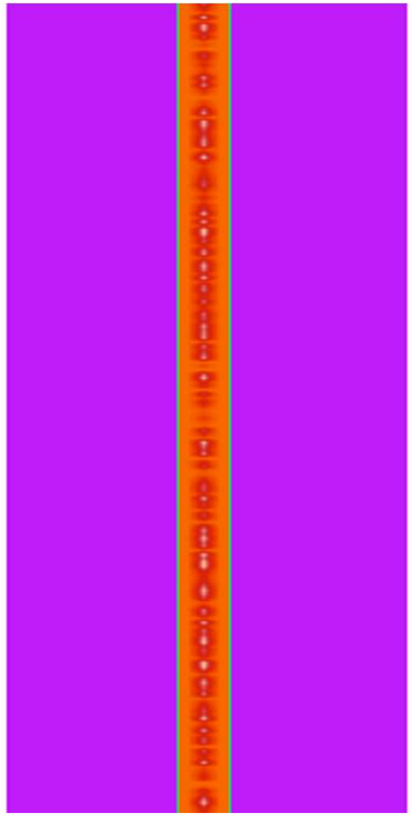
Instabilité d'une bande de courant

??

-Dnonlinear ??
Fond plat



-Dnonlinear ??
Incliné vers la droite



-Dnonlinear ??
Incliné vers la gauche

Instabilité des courants : théorie linéaire

Etudes des ondes = petites perturbations autour d'un état moyen (au repos ou non)

Certaines pertubations peuvent croître de manière exponentielle=ondes instables

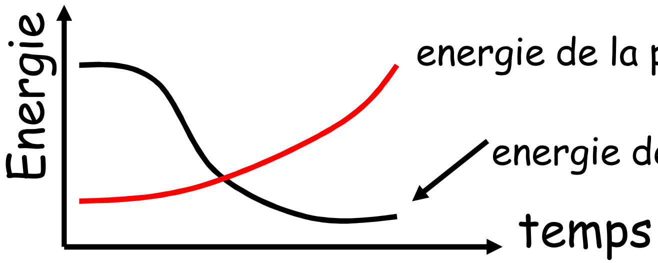
$\Rightarrow$ Ces perturbations deviennent non linéaires (les termes non linéaires dans les équations deviennent non négligeables)

$\Rightarrow$ Il s' effectue un transfert d'énergie de l'état moyen vers la perturbation

$\Rightarrow$ 2 types de transferts:

$\Rightarrow$ Energie cinétique de l'état moyen $\xrightarrow{\text{Instabilité barotrope}}$ énergie de l'onde

$\Rightarrow$ Energie potentielle de l'état moyen $\xrightarrow{\text{Instabilité barocline}}$ énergie de l'onde



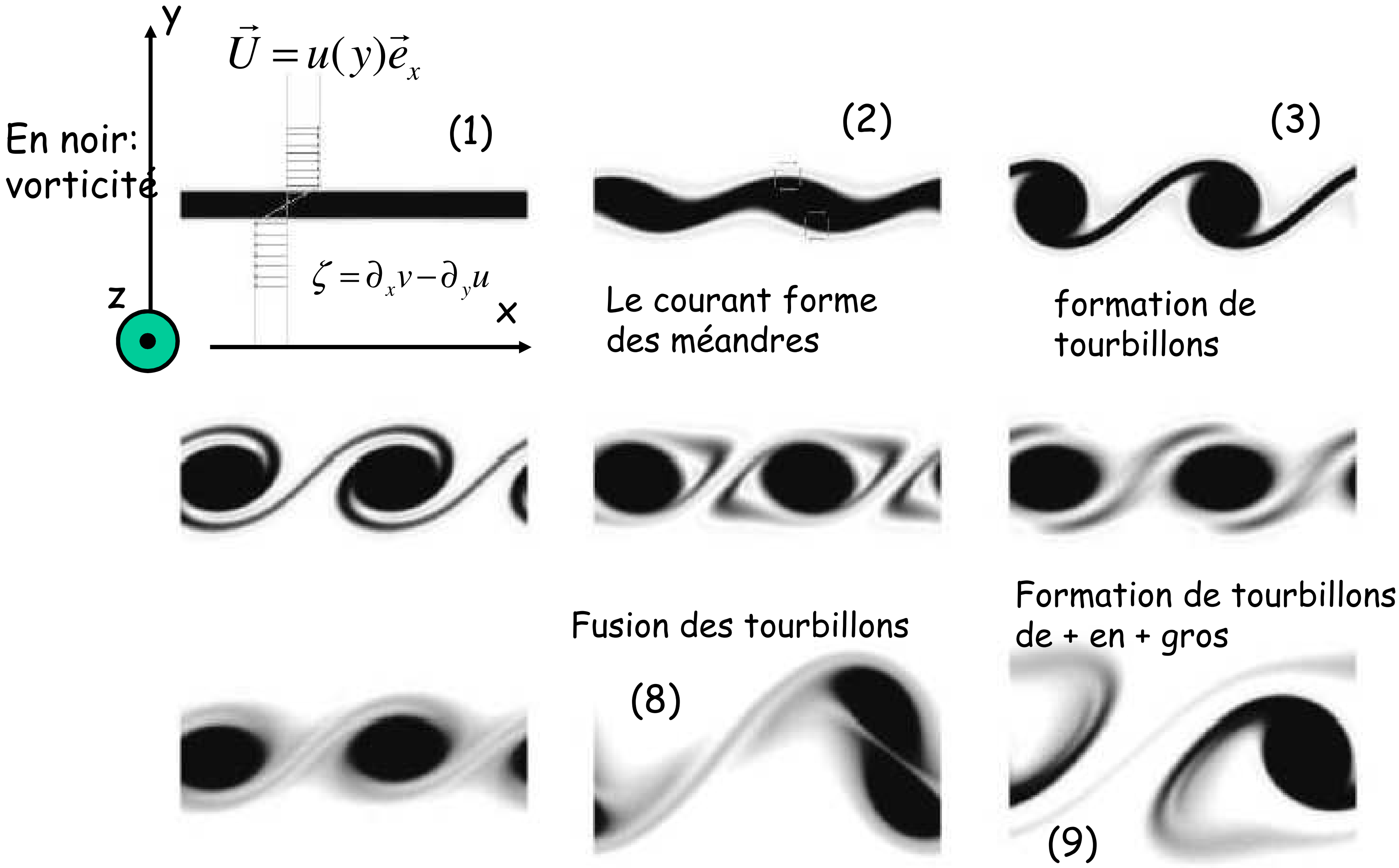
energie de la perturbation $E'(t) \propto e^{t/T}$

energie de l'état moyen (cinétique ou potentielle)

$$E = \overline{E} + E'$$

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} E(t')dt'$$

Instabilité barotrope



Instabilité barotrope: recherche d'un critère d'instabilité pour un écoulement moyen

Condition nécessaire pour qu'une instabilité se développe (p 97-100 Cushman-Roisin)

Instabilité barotrope = ne fait pas intervenir le cisaillement vertical du courant

Hypothèses:

densité homogène sur la verticale : $\rho = \rho_0$

plan béta : $f = f_0 + \beta_0 y$

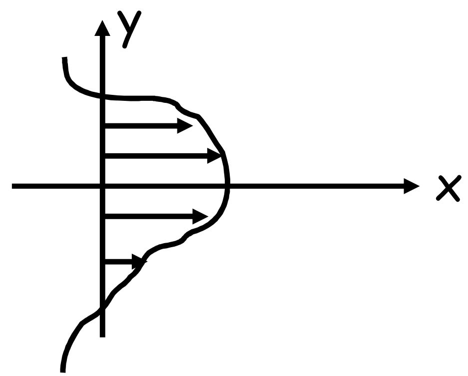
fond plat : H=cst

hypothèse du toit rigide : $\partial_t \eta \sim 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\partial_x \eta \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\partial_y \eta \\
&\partial_t \eta + \partial_x((H+\cancel{\eta})u) + \partial_y((H+\cancel{\eta})v) = 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\partial_x \eta \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\partial_y \eta \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

Instabilité barotrope: recherche d'un critère d'instabilité pour un écoulement moyen

Définition de l'état moyen: $U = \overline{u}(y), V = 0, \eta = \overline{\eta}(y)$



Equilibre géostrophique: $\overline{u} = -\frac{g}{f}\partial_y \overline{\eta}$

Définition d'une perturbation: $u = \overline{u} + u', v = v', \eta = \overline{\eta} + \eta'$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\overline{u} + \cancel{u'})\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial(\overline{u} + \cancel{u'})}{\partial y} - fv' = -g\partial_x \eta'$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\overline{u} + \cancel{u'})\frac{\partial v'}{\partial x} + \cancel{v'}\frac{\partial v'}{\partial y} + f(\overline{u} + u') = -g\partial_y(\overline{\eta} + \eta')$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - fv' = -g\partial_x \eta'$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial v'}{\partial x} + fu' = -\frac{1}{\rho_0}\partial_y \eta'$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

On introduit la fonction de courant: Ψ' tel que $\vec{u}' = \vec{k} \wedge \vec{\nabla}\Psi' \begin{cases} u' = -\partial_y \psi' \\ v' = \partial_x \psi' \end{cases}$

Instabilité barotrope: recherche d'un critère d'instabilité pour un écoulement moyen

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}-fv'=-g\partial_x\eta' \quad (1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial v'}{\partial x}+fu'=-\frac{1}{\rho_0}\partial_y\eta' \quad (2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0$$

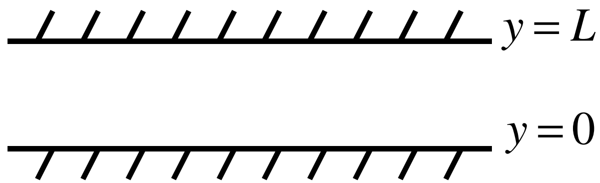
$$\partial_y(1)-\partial_x(2)+(\partial_x\psi,\partial_y\psi)$$

$$\partial_t\Delta\psi'+\overline{u}\partial_x\Delta\psi'+(\beta_0-\partial^2_{yy}\overline{u})\partial_x\psi'=0$$

On cherche des solutions de la forme: $\psi'=\phi(y)e^{i(lx-\omega t)}$

$$\partial^2_{yy}\phi-l^2\phi+\frac{\beta_0-\partial^2_{yy}\overline{u}}{\overline{u}-c}\phi=0 \quad \text{avec} \quad c=\frac{\omega}{l}$$

On se place dans un canal:



$$v'(y=0,L)=-\partial_x\psi'=-il\phi(0,L)e^{i(lx-\omega t)}=0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y=0)=\phi(y=L)=0$$

Instabilité barotrope: recherche d'un critère d'instabilité pour un écoulement moyen

$$\partial_{yy}^2\phi - l^2\phi + \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2\overline{u}}{\overline{u} - c}\phi = 0 \qquad c = \frac{\omega}{l} \qquad \phi(0) = \phi(L) = 0$$

La solution peut être complexe dans le cas général:

$$\partial_{yy}^2\phi.\phi^* - l^2\phi\phi^* + \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2\overline{u}}{\overline{u} - c}\phi\phi^* = 0 \Rightarrow \partial_{yy}^2\phi.\phi^* - l^2|\phi|^2 + \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2\overline{u}}{\overline{u} - c}|\phi|^2 = 0$$

Intégration par parties:

$$\int_0^L \partial_{yy}^2\phi.\phi^* dy = \left[\partial_y\phi.\phi^*\right] - \int_0^L \left[\partial_y\phi\partial_y\phi^*\right]dy = -\int_0^L \left|\partial_y\phi\right|^2 dy$$

$$\Rightarrow \quad A = -\int_0^L |\phi'|^2 + l^2|\phi|^2 dy + \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2\overline{u}}{\overline{u} - c}|\phi|^2 dy = 0$$

C est complexe: $c = c_r + ic_i$

A=0 donc Re(A)=Im(A)=0

Instabilité barotrope: recherche d'un critère d'instabilité pour un écoulement moyen

$$A = -\int_0^L |\phi'|^2 + l^2|\phi|^2 dy + \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{\bar{u} - c}|\phi|^2 dy = 0 \qquad c = c_r + ic_i$$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}\left(\int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{\bar{u} - c}|\phi|^2 dy\right) = 0$$

$$\int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{\bar{u} - c}|\phi|^2 dy = \int_0^L \frac{(\bar{u} + c^*)(\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u})}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy = \int_0^L \frac{(\bar{u} + c_r)(\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u})}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy + ic_i \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy$$

$$\mathrm{Im}(A) = c_i \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy = 0$$

2 cas: si $c_i = 0$ $\quad \psi' = \phi(y) e^{il(x - c_r t)}$ Perturbation sinusoidale, bornée

si $c_i \neq 0$ $\quad \psi' = \phi(y) e^{il(x - c_r t)} . e^{lc_i t}$ Perturbation potentiellement exponentielle=> courant pot. instable

$$\mathrm{Im}(A) = c_i \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u}}{|\bar{u} - c|^2}|\phi|^2 dy = 0$$

termes >0

$\Rightarrow$ $\boxed{\beta_0 - \partial_{yy}^2 \bar{u} \text{ change de signe sur } [0, L]}$

Instabilité barotrope: critère d'instabilité

$\boxed{\beta_0 - \partial^2_{yy}\overline{u} \text{ change de signe sur } [0, L]}$

Vorticité de l'écoulement moyen: $\overline{Q} = \dfrac{f(y)+\zeta(y)}{H} = \dfrac{f_0 + \beta_0 y - \partial_y \overline{u}}{H}$

$$\partial_y \overline{Q} = \frac{1}{H}(\beta_0 - \partial^2_{yy}\overline{u})$$

<u>Condition nécessaire:</u>

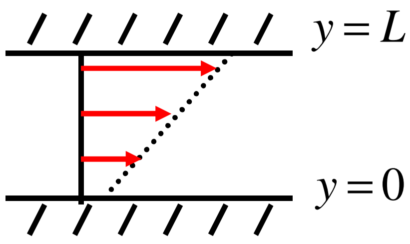
Ecoulement instable $\Rightarrow$ La vorticité potentielle Q de l'écoulement moyen atteint un extremum sur [0,L]

<u>Inversement:</u>

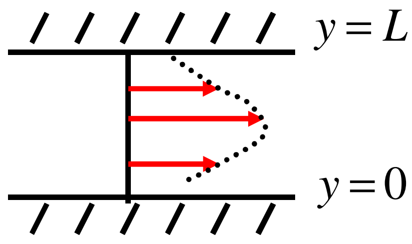
Q n'atteint pas d'extremum sur [0,L] $\Rightarrow$ L'écoulement est stable

<u>Cas du plan f</u>: $\beta_0 = 0$

$\boxed{\partial^2_{yy}\overline{u} \quad \text{change de signe sur } [0, L]}$



stable



potentiellement instable