

# DFE11

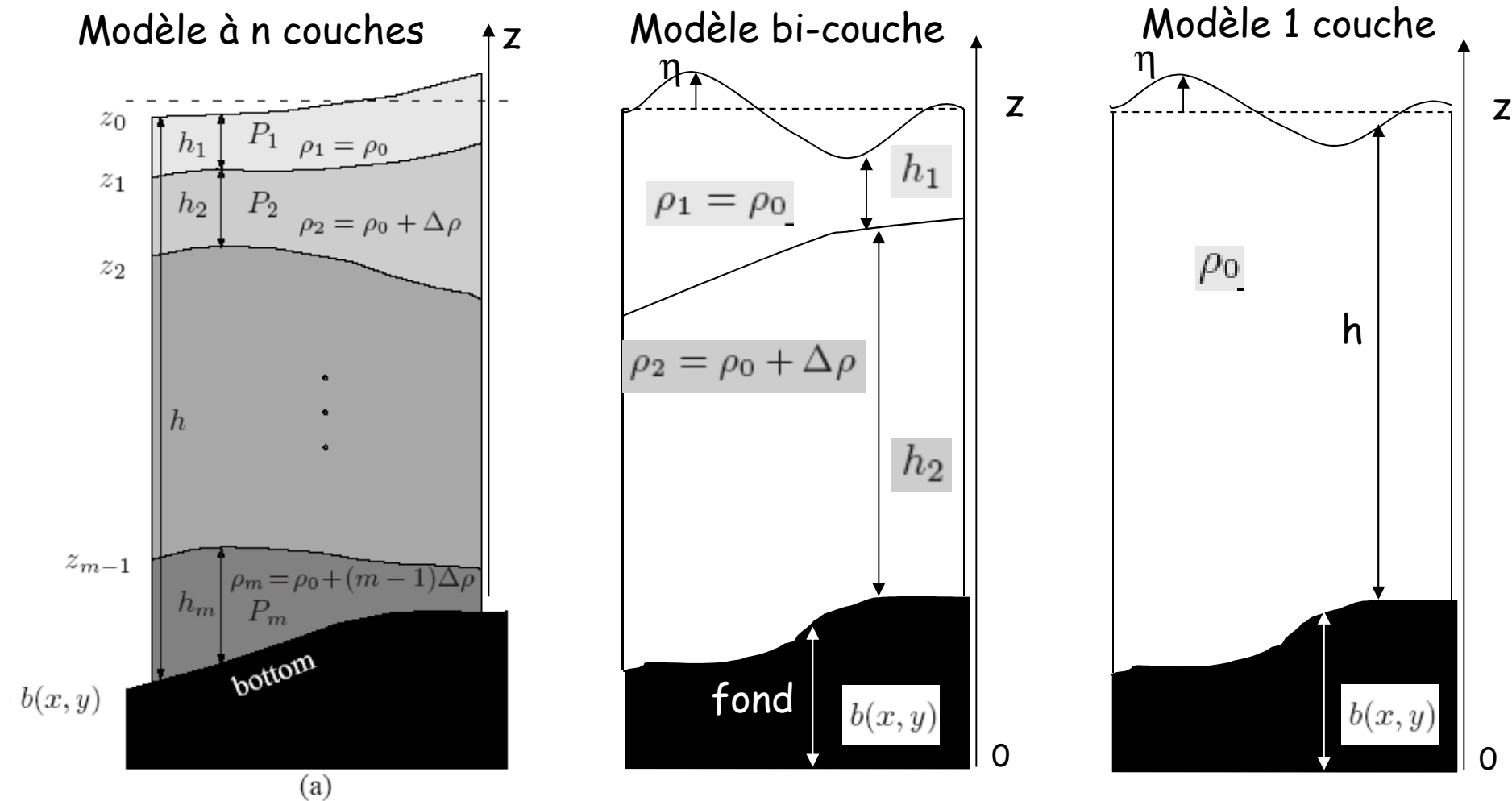
## Océan Bleu Dynamique des Fluides Géophysiques



- Modèle « Shallow water » à couches
- Vorticité potentielle
- Ondes longues de gravité : les ondes de Kelvin

# Modèle à couches homogènes

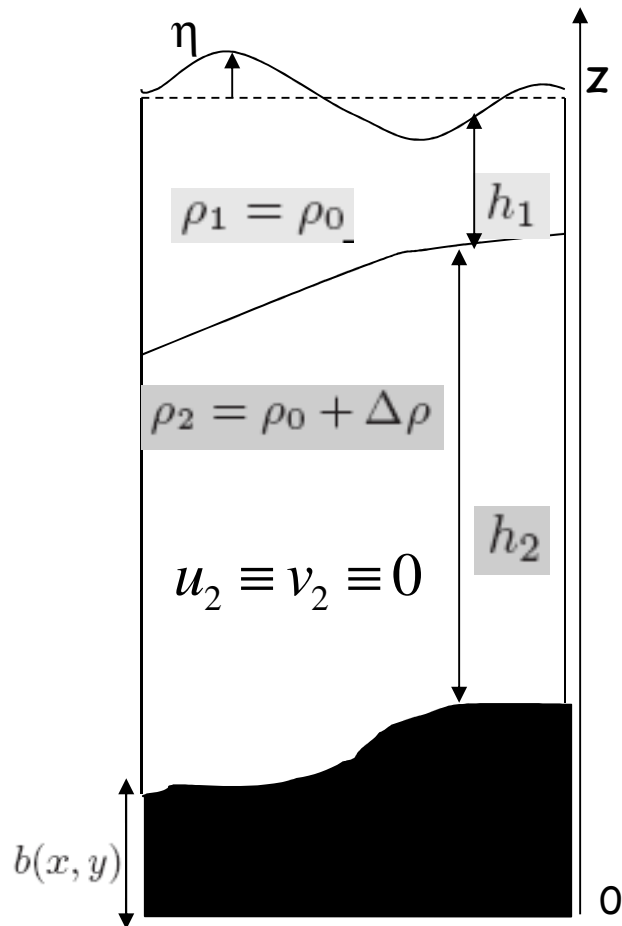
On considère des couches de densité différente, mais constante par couche, séparées par des surfaces  $z_i = z_i(x, y, t)$



# Modèle shallow-water avec stratification: cas du modèle « 1 couche et demi »

Couche de surface:

Modèle 1 couche et demi:



$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - f v_1 = -g \partial_x \eta \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + f u_1 = -g \partial_y \eta \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_1 h}{\partial x} + \frac{\partial v_1 h}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Rappel important :  $\partial_z u_1 \equiv \partial_z v_1 \equiv 0$

Hypothèse : Couche 2 au repos

$$u_2 \equiv v_2 \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \equiv -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p_2 \quad \longrightarrow \quad \partial_x \eta = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \partial_x h_1$$

Ou encore  $g \partial_x \eta = g' \partial_x h_1$

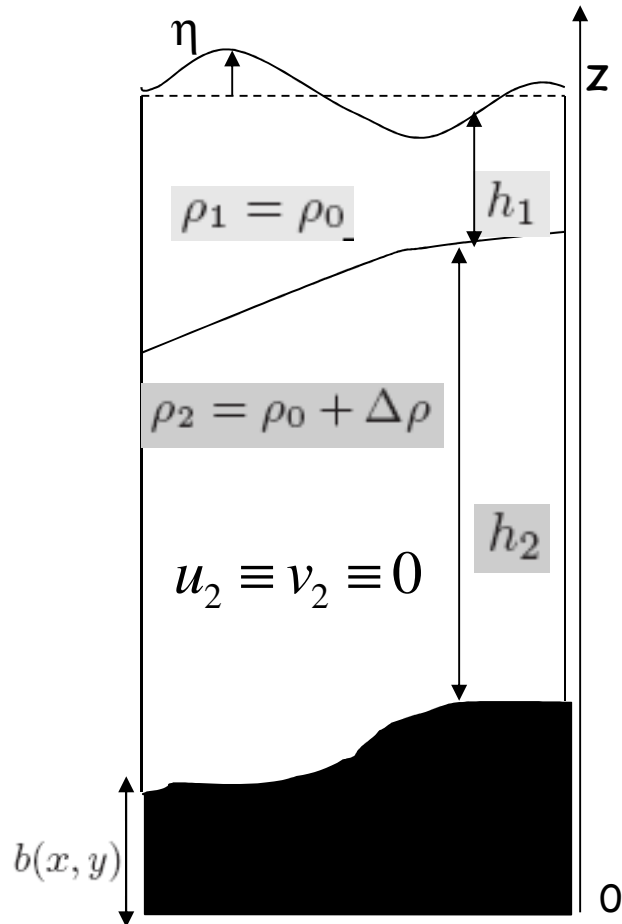
Avec  $g'$  = gravité réduite

$$g' = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g \sim 0.001 \text{ à } 0.01 g$$

# Modèle shallow-water avec stratification: cas du modèle « 1 couche et demi »

Couche de surface:

Modèle 1 couche et demi:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \partial_x h \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \partial_y h \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$g'$  = gravité réduite

$$g' = \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) g \sim 0.01g$$

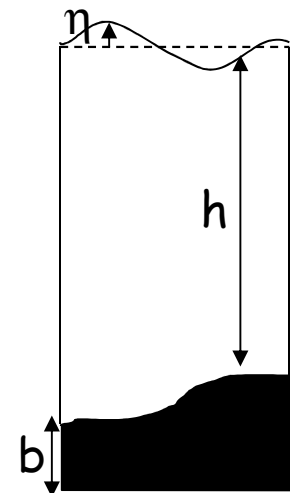
À comparer avec le modèle à 1 seule couche

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \partial_x \eta \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \partial_y \eta \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

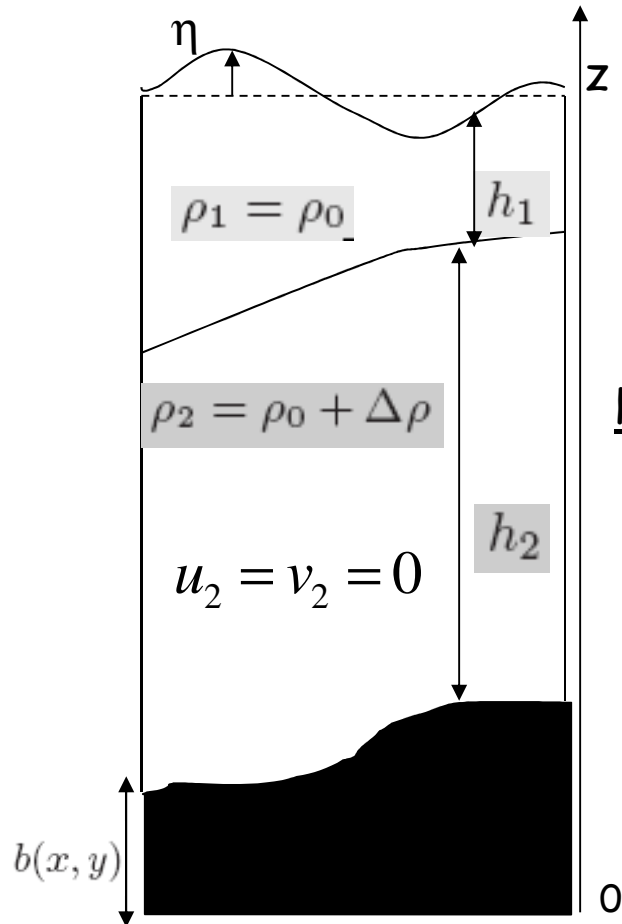
avec  $\partial_x \eta = \partial_x (h_1 + b)$



# Modèle shallow-water avec stratification: cas du modèle « 1 couche et demi »

Couche de surface:

Modèle 1 couche et demi:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \partial_x h \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \partial_y h \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$g'$  = gravité réduite

$$g' = \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) g \sim 0.01g$$

Hypothèse: plan f (on néglige la sphéricité de la terre)

On calcule  $\partial_x(2) - \partial_y(1)$  pour éliminer la pression:

$$\begin{aligned} \partial_x(2) - \partial_y(1) &= \partial_t \partial_x v + \partial_x(u \partial_x v) + \partial_x(v \partial_y v) + f \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad - \partial_t(\partial_y u) - \partial_y(u \partial_x u) - \partial_y(v \partial_y u) + f \partial_y v = 0 \\ &= \partial_t(\partial_x v - \partial_y u + f) + (\partial_x u + \partial_y v)(\partial_x v - \partial_y u) \\ &\quad + (u \partial_x + v \partial_y)(\partial_x v - \partial_y u) + f(\partial_x u + \partial_y v) \end{aligned}$$

$$q = \partial_x v - \partial_y u + f \quad \Rightarrow \quad \partial_t q + (u \partial_x + v \partial_y) q + (\partial_x u + \partial_y v) q = 0$$

# Définition de la vorticité potentielle (VP): cas du modèle « 1 couche et demi »

$$q = \partial_x v - \partial_y u + f$$

$$\partial_t q + (u \partial_x + v \partial_y) q + (\partial_x u + \partial_y v) q = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -(\partial_x u + \partial_y v) q$$

Conservation de la masse:  $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = \frac{dh}{dt} + h(\partial_x u + \partial_y v) = 0$

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = -(\partial_x u + \partial_y v) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{h} \right) = 0$$

On pose:  $Q = \frac{\partial_x v - \partial_y u + f}{h} = \frac{\zeta + f}{h}$

- $\zeta$  est la composante verticale du vecteur tourbillon ( $\text{rot}(u)$ )
- $f$  est la composante verticale du vecteur rotation de la terre
- $h$  est l'épaisseur de la couche

$Q = \text{vorticité potentielle}$

# Conservation de la VP

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$



Une particule de fluide conserve « sa grandeur Q »

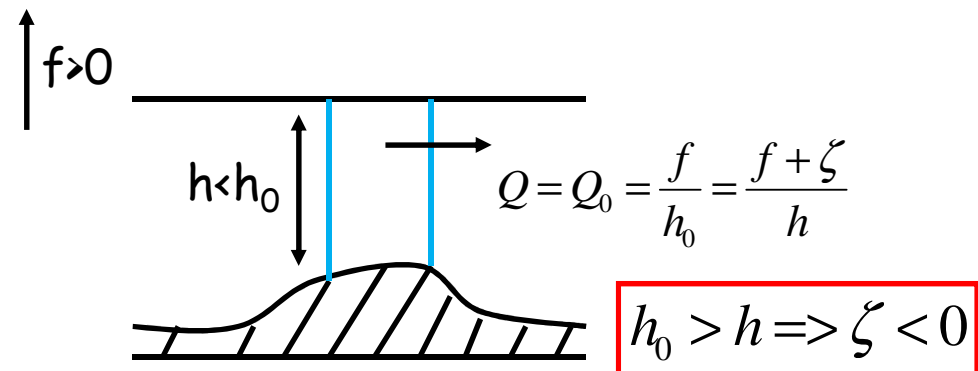
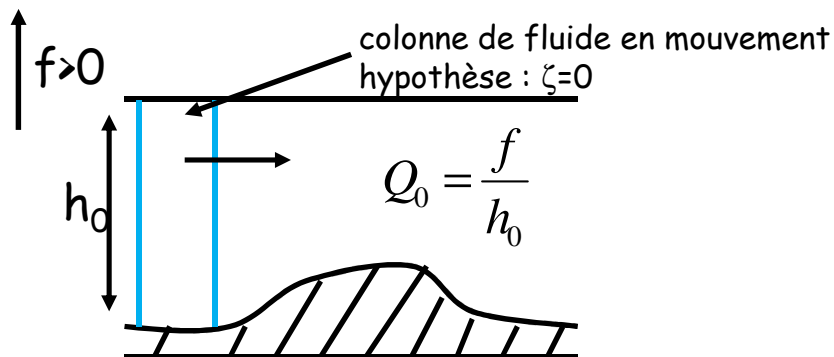
Lorsqu'on suit une particule de fluide dans son mouvement, la grandeur Q est conservée:  $Q(t) = Q(t_0)$



Si Q est connue à un instant donné, Q est connue qq soit t

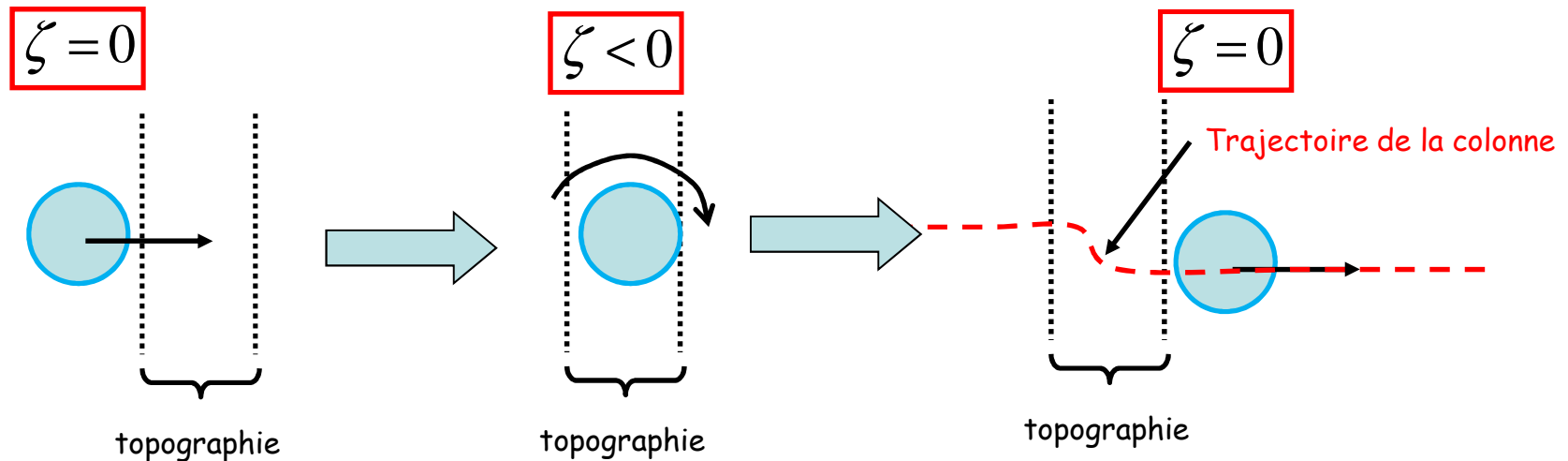
= propriété très utile lorsqu'on connaît l'état initial

Application: franchissement d'une topographie par une colonne de fluide



# franchissement d'une topographie par une colonne de fluide

Vue de dessus:



Cas des faibles nombres de Rossby:

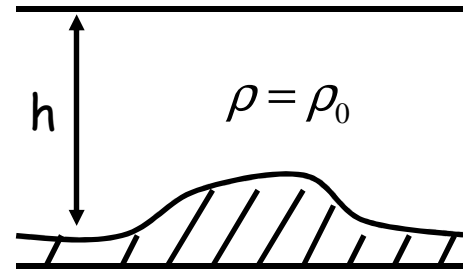
$$Ro = \frac{U}{fL} \ll 1$$

$$Q = \frac{\partial_x v - \partial_y u + f}{h} = \frac{\zeta + f}{h} = \left( \frac{U}{LH}, \frac{f}{H} \right) \sim \frac{f}{h}$$

Q se conserve  $\Rightarrow$  si f constant (hypothèse du plan f), h se conserve  
 la colonne de fluide garde la même épaisseur donc suit les lignes d'égale  
 profondeur  $\Rightarrow$  on retrouve la colonne de Taylor qui suit les lignes d'égale  
 profondeur

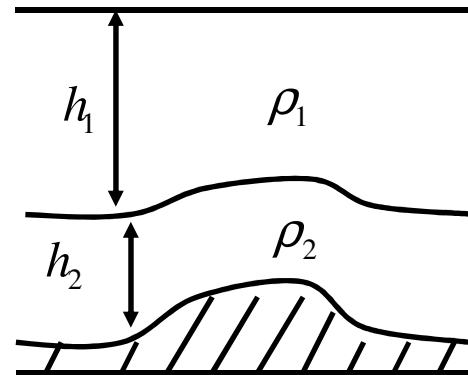


# Vorticité potentielle: généralisation à un modèle à plusieurs couches



Modèle barotrope  
(densité constante):

$$Q = \frac{f + \zeta}{h}$$



Modèle bi-couche :

$$Q_1 = \frac{f + \zeta_1}{h_1}$$

$$Q_2 = \frac{f + \zeta_2}{h_2}$$

etc....

2 outils:

- systèmes d'équations SW
- vorticité potentielle

=> Utiles pour étudier certains écoulements en DFG

# Ondes dans les écoulements géophysiques

Pourquoi étudier les ondes?

Beaucoup de phénomènes sont linéaires et peuvent être décrits par des équations d'onde à différentes échelles de temps

exemples: les marées, El Nino, les courants côtiers

Pour étudier les ondes, on linéarise les équations de la dynamique:

Hypothèses: 
$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{U}{fL} \ll 1 \\ R_{0T} &= \frac{1}{fT} \sim 1 \end{aligned} \right\} \frac{U}{L} \ll \frac{1}{T}$$

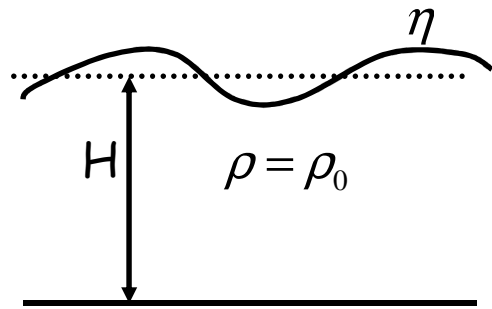
→ Vitesse de propagation de l'onde:  $C = \frac{L}{T} \gg U$

→ La vitesse de propagation de l'onde est beaucoup plus grande que la vitesse dans le fluide (U)

→ La propagation de l'énergie dans le fluide est beaucoup plus rapide que le déplacement des particules de fluide

# Ondes dans les écoulements géophysiques: linéarisation des équations shallow water

Modèle barotrope à fond plat:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \partial_x \eta$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \partial_y \eta$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0, \quad h = H + \eta$$

Equations non linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \partial_x \eta$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \partial_y \eta$$

Equations linéarisées autour de l'état de « repos »

$$\partial_t \eta + H(\partial_x u + \partial_y v) + u \partial_x \eta + v \partial_y \eta + \eta(\partial_x u + \partial_y v) = 0$$

$$\frac{\Delta \eta}{T}$$

(1)

$$\frac{HU}{L}$$

(2)

$$\frac{\Delta \eta U}{L}$$

(3)

$$\frac{\Delta \eta U}{L}$$

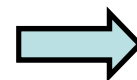
(4)

$$\frac{(3)}{(1)} = \frac{UT}{L} = \frac{U}{C} \ll 1$$

$$\frac{(4)}{(1)} = \frac{UT}{L} = \frac{U}{C} \ll 1$$



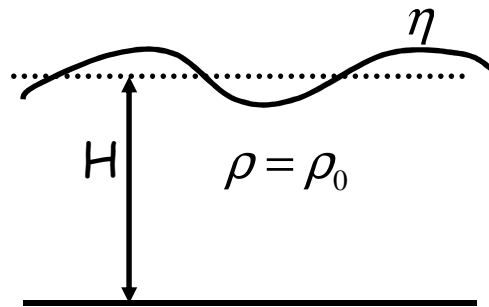
$$\frac{(2)}{(1)} \sim 1 \Rightarrow \frac{\Delta \eta}{H} = \frac{U}{C} \ll 1$$



variations de la surface libre petites devant la hauteur d'eau totale

# Ondes dans les écoulements géophysiques:

Modèle barotrope à fond plat:



Equations linéarisées:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\partial_x \eta$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\partial_y \eta$$

$$\partial_t \eta + H(\partial_x u + \partial_y v) = 0$$

Recherche d'une solution sous forme d'onde:

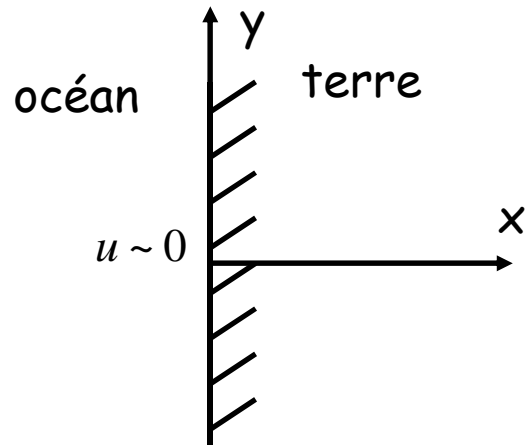
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

Cas particulier: Onde de Kelvin

liée à la présence d'une frontière=côte, chaîne de montagne, équateur

# Ondes dans les écoulements géophysiques:

## Cas de l'onde de Kelvin dans l'océan



A proximité de la côte:

$$u \sim 0$$

$$-fv = -g\partial_x \eta \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\partial_y \eta \quad (2)$$

$$\partial_t \eta + H\partial_y v = 0 \quad (3)$$

(2) et (3)

$$\partial_{tt}^2 v - gH\partial_{yy}^2 v = 0$$

$$v = v_0 e^{i(kx + ly - \omega t)} \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 + c^2 l^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{gH}$$

Solution générale de l'équation d'ondes:  $v = V_1(x, y - ct) + V_2(x, y + ct)$

$$(2): \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\partial_y \eta \quad \longrightarrow \quad \partial_y \eta = -\frac{1}{g}(-c\partial_y V_1(x, y - ct) + c\partial_y V_2(x, y + ct))$$

# Ondes dans les écoulements géophysiques: onde de Kelvin

Cas de l'onde de Kelvin dans l'océan

$$\partial_y \eta = -\frac{1}{g}(-c\partial_y V_1(x, y-ct) + c\partial_y V_2(x, y+ct)) \Rightarrow \eta = \frac{H}{c} V_1(x, y-ct) - \frac{H}{c} V_2(x, y+ct) + \eta_0$$

Equation (1): équilibre géostrophique:  $fv = g\partial_x \eta$

$$\Rightarrow fV_1(x, y-ct) + fV_2(x, y+ct) = c(\partial_x V_1(x, y-ct) - \partial_x V_2(x, y+ct))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} fV_1 = c\partial_x V_1 \\ fV_2 = -c\partial_x V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = A(y-ct)e^{x/R} \\ V_2 = B(y+ct)e^{-x/R} \end{cases} \quad \text{avec } R = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad \text{Rayon de Rossby}$$

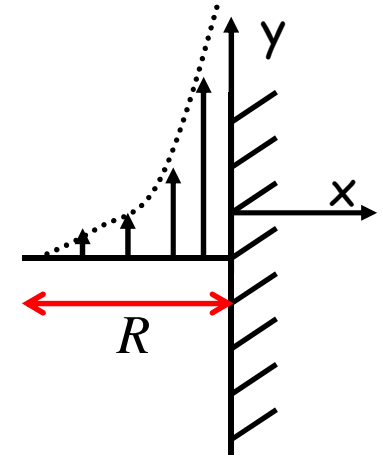
Lorsque  $x \rightarrow -\infty$   $e^{-x/R} \rightarrow +\infty \Rightarrow B(y) \equiv 0 \Rightarrow$  Une seule solution

$$V(x, y, t) = A(y-ct)e^{x/R}, x < 0$$

# Ondes dans les écoulements géophysiques: onde de Kelvin

Cas de l'onde de Kelvin dans l'océan

$$V(x, y, t) = A(y - ct)e^{x/R}, x < 0 \quad \text{avec} \quad R = \frac{\sqrt{gH}}{f}$$



- l'onde est piégée à la côte sur une distance R:  
 $g=10 \text{ m/s}^2, H=40 \text{ m}, f=10^{-4}\text{s}^{-1} \Rightarrow R \sim 200 \text{ km}$  (cas barotrope)

$g'=2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2, H_1=40 \text{ m}, f=10^{-4}\text{s}^{-1} \Rightarrow R \sim 9 \text{ km}$  (cas barocline)

- l'onde se propage le long de la côte en laissant la côte sur sa droite (si  $f > 0$ )

- propagation très rapide à la vitesse  $c$ :

$g=10 \text{ m/s}^2, H=40 \text{ m} \Rightarrow c \sim 1700 \text{ km/j}$  (cas barotrope, marée)

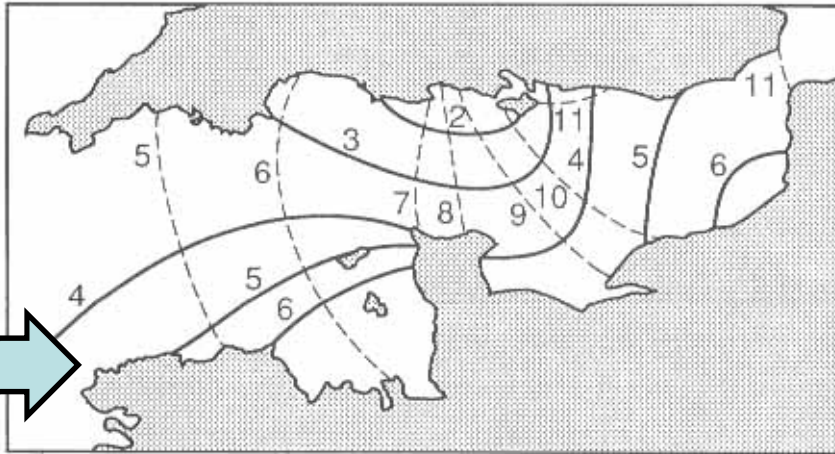
$g'=2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2, H_1=40 \text{ m} \Rightarrow c \sim 1 \text{ m/s} \sim 100 \text{ km/j}$  (cas barocline, phénomène el Niño)

- Onde non dispersive: toutes les fréquences se propagent à la même vitesse

exemple: la marée océanique = systèmes d'ondes forcées par l'attraction des astres

## La marée dans la Manche

- Lignes d'égalité amplitude en m (en trait plein)
- Lignes cotidales ou d'égalé phase (en pointillé)



**Figure 6-2** Cotidal lines (dashed) with time in lunar hours for the tide in the English channel showing the eastward progression of the tide from the North Atlantic Ocean. Lines of equal tidal range (solid, with values in meters) reveal larger amplitudes along the French coast, namely to the right of the wave progression in accordance with Kelvin waves. (From Proudman, 1953, as adapted by Gill, 1982.)

Onde de Kelvin entre dans la manche

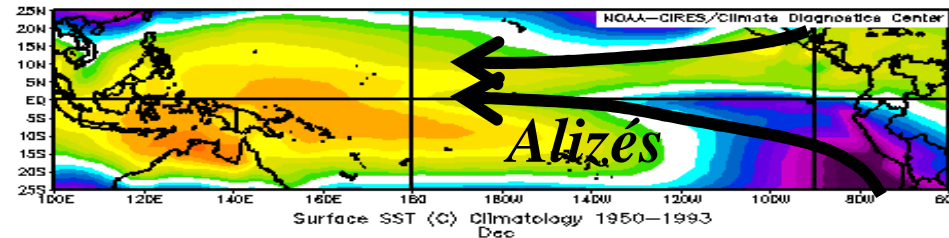
- Amplitude plus forte le long de la côte française à cause du max d'amplitude de l'onde à la côte
- Phase (pointillé) augmente vers l'est → sens de propagation



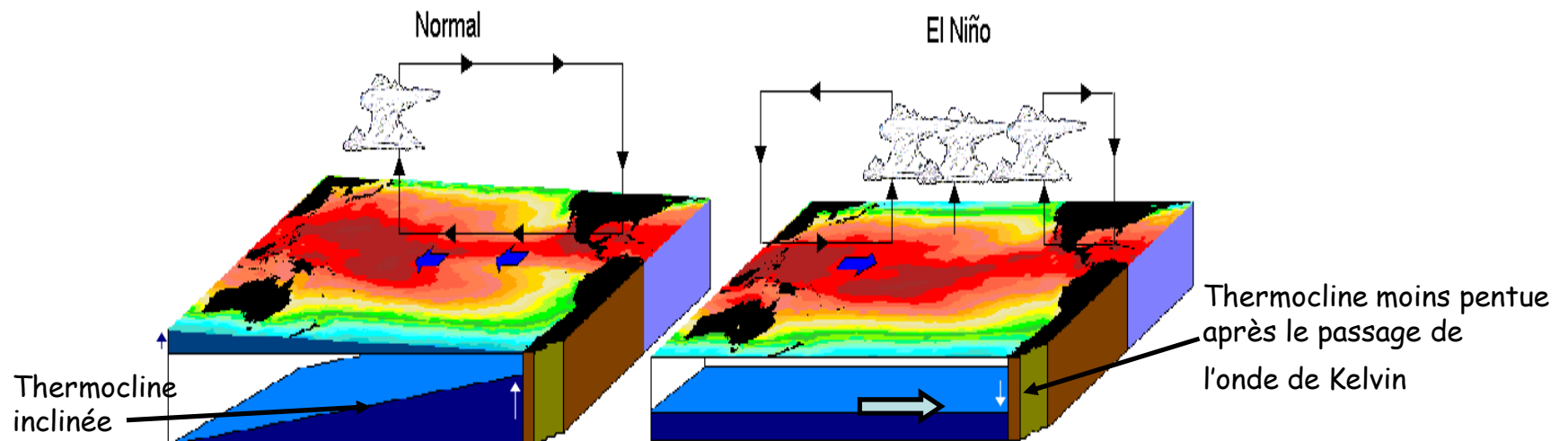
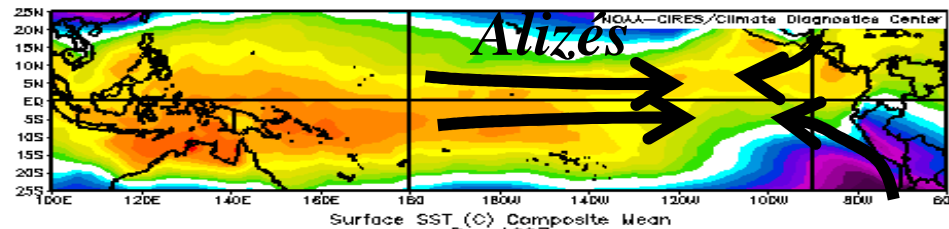
# Ondes de Kelvin équatoriales

2ème exemple: les ondes de Kelvin équatoriales dans le phénomène El Niño  
L'équateur joue un rôle équivalent à un « mur »: des ondes de Kelvin se propagent de chaque côté de l'équateur= une seule onde se propageant vers l'est

Année normale

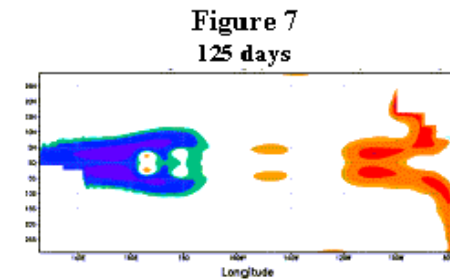
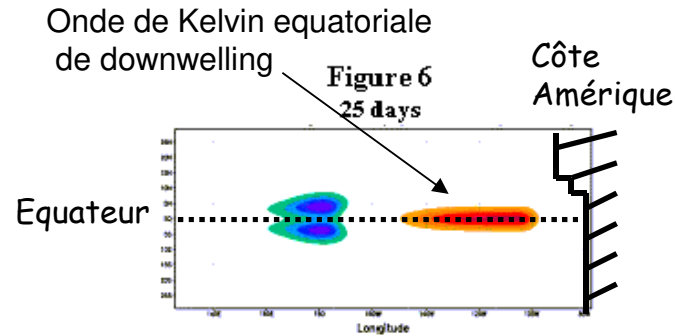


El Niño 1997-98



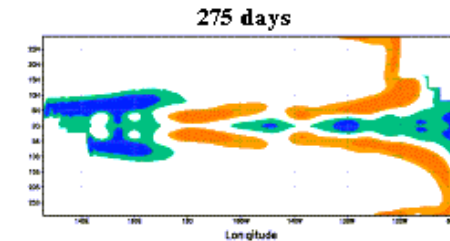
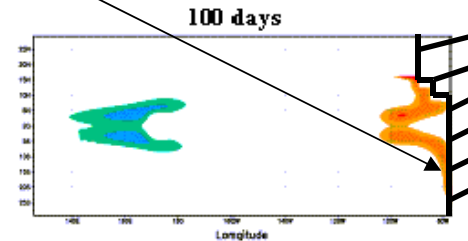
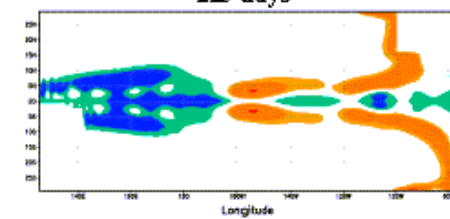
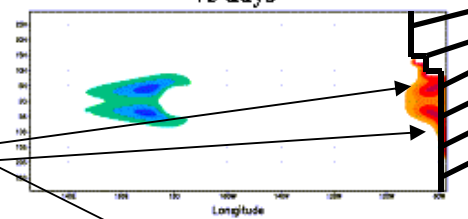
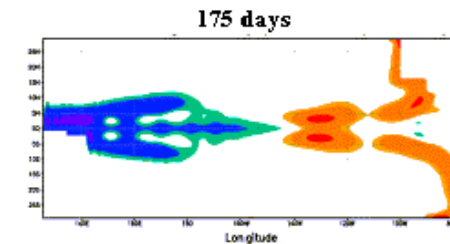
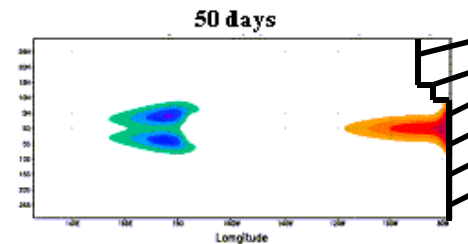
# Ondes de Kelvin équatoriales et côtières

(1) L'ajustement se propage d'ouest en est via une onde de Kelvin équatoriale qui fait descendre la thermocline

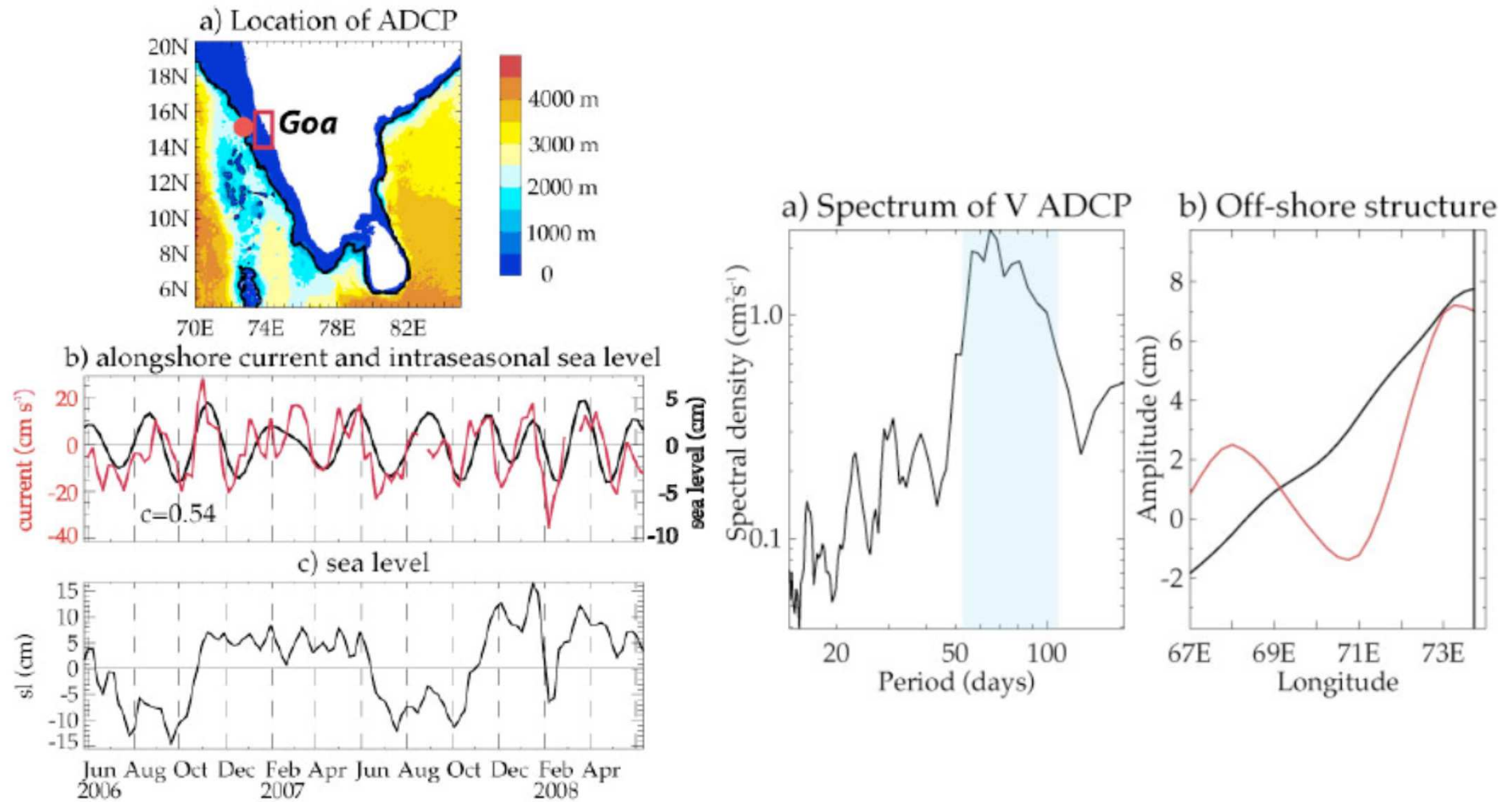


(2) L'onde de Kelvin équatoriale atteint la côte et génère deux ondes de Kelvin côtières, qui se propagent vers les pôles

Ondes de Kelvin côtières se propagent le long de la côte



# Ondes de Kelvin côtières intrasaisonnères



J. Vialard et al. 2009

# Ondes de Kelvin équatoriales (groupe 4) (exo 5.2 du recueil de TDs)

Trouvez les solutions des équations « shallow-water » dans le modèle à une couche et demi, dans le plan bêta équatorial ( $f = \beta_0 y$ ) ayant une vitesse méridienne identiquement nulle (l'équateur joue un rôle équivalent à un « mur »).

1) Déterminer l'échelle spatiale méridienne caractéristique pour ces ondes en fonction de  $g'$ ,  $H_1$ ,  $\beta_0$  et la calculer.

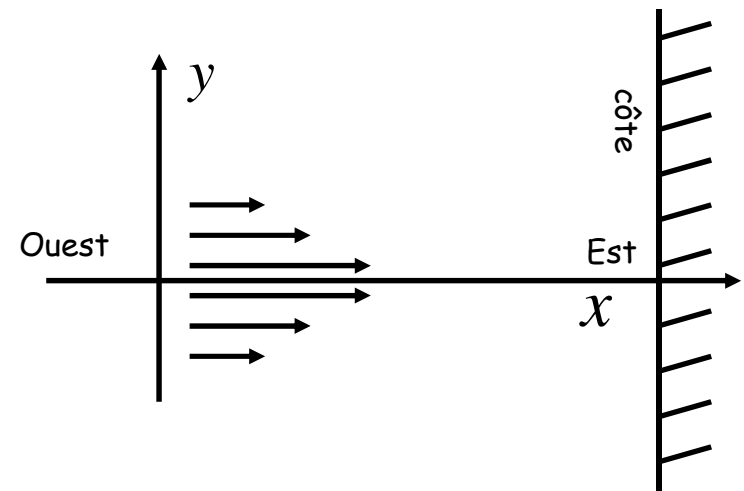
2) Retrouver cette échelle de longueur en utilisant la définition du rayon de déformation de Rossby vue en cours.

3) Dans quelle direction se propage-t-elle?

Que se passe-t-il lorsque l'onde atteint les côtes équatoriales?

Application numérique:

$H_1 = 200\text{m}$ ,  $\Delta\rho = 1\text{kg.m}^{-3}$ ,  $a = 6400\text{ km}$  (rayon terrestre)



# Profil de courant en aval d'un escarpement (aide pour groupe 7) (exo 4.2 du recueil de TDs)

Un courant verticalement uniforme mais cisailé horizontalement comme sur la figure ci-contre doit franchir un escarpement topographique. En supposant que la vitesse s'annule au large, et en supposant connus  $U_1$ ,  $L_1$ ,  $H_1$ , déterminer le profil de vitesse  $U_2$  et  $L_2$ .

On négligera les variations de la surface libre du fluide, et la latitude moyenne est proche de  $45^\circ\text{N}$  ( $f \sim 10^{-4}$ )

Que se passe-t-il si  $H_2 < 100$  m (réponse qualitative)?

$$H_1 = 200\text{m}$$

$$L_1 = 10\text{km}$$

$$U_1 = 0.5\text{m/s}$$

$$H_2 = 160\text{m}$$

