



Unité de Mécanique

Cours DFE11

OCÉAN BLEU

2019 - 2020

Exercices avec corrigés

Laurent Mortier

Chapitre 1

Généralités. Moment cinétique. Force de Coriolis

1.1 Pour se mettre en forme : Jour solaire, jour sidéral

Déterminer la relation entre la durée du jour solaire (durée entre 2 passages du même méridien devant le soleil) et le jour sidéral (période de rotation de la terre dans un repère lié au soleil). On rappelle que 1 an vaut 365,2422... jours solaires.

Corrigé

Corrigé. Dans le repère tournant défini par le soleil et le centre de la terre, la terre tourne sur elle-même en exactement 1 jour solaire : c'est la définition du jour solaire. Ce repère a un taux de rotation de $2\pi/(1an)$. Les sens de rotation étant les mêmes, on a $2\pi/J_{sidéral} = 2\pi/J_{solaire} + 2\pi/(1an)$, ce qui donne $J_{sidéral} = J_{solaire}Y/(1 + Y)$ et numériquement $J_{sidéral} = 86164.1s$. On a alors $\Omega = 7.2910^{-5}s^{-1}$.

1.2 Accélération d'entraînement et gravité sur Jupiter

Jupiter tourne sur elle-même en 9h 54mn et son rayon est de 71400 km. Sachant que l'accélération mesurée à l'équateur sur Jupiter est de $26 ms^{-2}$ en déduire la valeur de la gravité et l'accélération centrifuge.

Corrigé

Corrigé. On a tout simplement $g = g_{acc.pesanteur} - \Omega^2 R$, ce qui donne $g_{acc.pesanteur} = 28ms^{-2}$ et $g_{centrifuge} = 2ms^{-2}$. Sur Jupiter, la différence est d'un peu moins de 10% tandis que sur terre elle est à peine de 0.3%.

1.3 Le 'Great Red Spot' de Jupiter

Le GRS de Jupiter est centré vers 22° sud et s'étend environ sur 12° degré de latitude et 25° degré de longitude. Les vitesses sont de l'ordre de $100 ms^{-1}$. Jupiter tourne sur elle même en 9h 54mn et son rayon est de 71400 km. Est-ce que le GRS est influencé par la rotation de Jupiter ?

Corrigé

Corrigé. C'est immédiat : $f = 1.310^{-4}s^{-1}$, $L \sim 20000km$ et on trouve $R_0 \sim 0.04$ et le GRS est bien influencé par la rotation de Jupiter. Attention : si on veut calculer exactement la longueur des demi-axes, un degré en longitude varie en longueur avec la latitude.

1.4 Moment cinétique, force centrifuge et force de Coriolis

Une particule au repos à la surface de la terre reçoit une impulsion dirigée vers le sud qui lui communique la vitesse v . En écrivant qu'elle conserve son moment cinétique selon x , en déduire quelles est la force apparente, dirigée selon l'axe des x qui s'exerce sur elle? De la même façon, déduire les forces qui s'exercent sur elle si elle reçoit une impulsion dirigée vers le haut qui lui communique la vitesse w . Et enfin, en considérant la force centrifuge qui s'exerce sur une particule qui reçoit une impulsion vers l'est, déduire les forces qui s'exercent sur elle selon les axes y et z ? Conclure.

Corrigé

Corrigé. Dans le cas d'une impulsion donnée vers le sud ou vers le haut, le moment cinétique de la particule initialement au repos par rapport à la terre ne change pas puisque la force est perpendiculaire à la qdm dans le repère galiléen où la particule tourne à la vitesse de la terre. Dans le cas d'une impulsion vers le sud, on a donc $\Omega r^2 = (\Omega(r + \delta r) + \delta u)(r + \delta r)$ où r est la distance à l'axe. On a $r = a \cos \phi$, ϕ la latitude et a le rayon de la terre. On en déduit $r \delta u = -2\Omega \delta r$ et alors $\delta u / \delta t = -2\Omega a (-\sin \phi) \delta \phi / \delta t$. Par définition $a \delta \phi / \delta t = v$ et alors dans le repère tournant la particule a une accélération vers l'est $\delta u / \delta t = +2\Omega \sin \phi v$. On procède de même pour l'impulsion vers le haut.

Dans le cas d'une impulsion vers l'Est, le moment cinétique change. On considère alors simplement la force centrifuge dans le repère galiléen lié à la terre, soit

$\vec{F} = \frac{(\Omega r + u)^2}{r} \vec{r}/r$, \vec{r} étant le vecteur entre la projection du point sur l'axe de rotation de la terre et le point lui-même. Il suffit alors de projeter le vecteur \vec{r} sur la verticale locale et le vecteur \vec{j} , soit $\vec{r}/r = -\sin\phi \vec{j} + \cos\phi \vec{k}$. Sur l'axe verticale, la projection vaut $2\Omega\cos\phi u$ et sur l'axe des y $-2\Omega\sin\phi u$. Les autres termes ne dépendent pas de u et peuvent être intégrés dans la gravité ou concernent des termes géométriques liés à la sphéricité de la terre. On collecte les termes dépendant de Ω et on trouve :

$$F_{\text{coriolis selon } x} = -f_* w + f v \quad (1.1)$$

$$F_{\text{coriolis selon } y} = -f u \quad (1.2)$$

$$F_{\text{coriolis selon } z} = f_* u \quad (1.3)$$

avec $f = 2\Omega\sin\phi$ et $f_* = 2\Omega\cos\phi$.

1.5 Maximum du moment cinétique

Démontrer que, dans une atmosphère stationnaire et visqueuse (viscosité ν), le maximum du moment cinétique se situe au sol à l'équateur. On raisonne par l'absurde en considérant une courbe infinitésimale autour du maximum et en supposant que le maximum n'est pas au sol à l'équateur. On devra considérer les relations suivantes :

Conservation du moment cinétique

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \partial_z \nu \partial_z M \text{ avec } M = (\Omega a \cos(\varphi) + u)a \cos(\varphi) \quad (1.4)$$

Conditions aux limites

$$\text{en } z=0 : \quad \nu \partial_z u = C u \quad (1.5)$$

$$\text{en } z=H : \quad \partial_z u = 0 \quad (1.6)$$

Corrigé

Corrigé. On traitera cet exercice lors de la 5ème séance de TD.

1.6 Oscillations d'inertie dans l'océan

La courbe de la figure 1.1 représente l'hodographe intégré construit avec les mesures d'un courantomètre immergé à quelques mètres de profondeur dans l'océan en été. On suppose que l'on peut assimiler cette courbe à la trajectoire d'une particule d'eau. En déduire la latitude approximative du point de mesure. Quelle est la vitesse avant le coup de vent ? Pendant le coup de vent ? (on distinguera la vitesse moyenne et la vitesse associée aux oscillations). Dans quelle mer se trouvait le courantomètre à votre avis ?

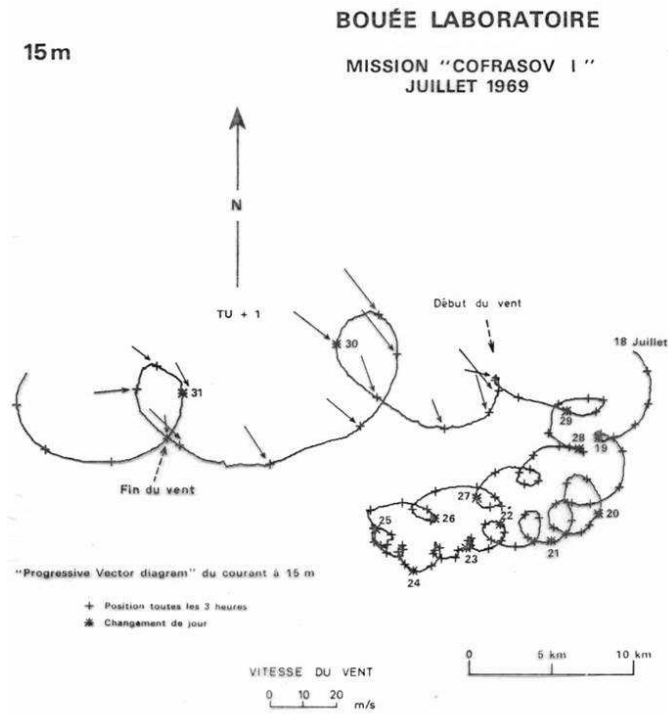


FIG. 1.1 – Hodographe intégré du courant de surface mesuré par la bouée Bohra



FIG. 1.2 – d'après www.recherche.gouv.fr/archives/

Corrigé

La trajectoire peut se décomposer en une trajectoire "lissée" qui dépend du vent ou des courants généraux et un cercle d'inertie dont le rayon dépend manifestement du vent après le début du coup de vent. Ce cercle est parcouru en 18h (il suffit de pointer par exemple la croix correspondant au 30 juillet à 6h et celle du 31 Juillet à 0h). On en déduit alors facilement la latitude par $\sin\phi = 12/18$, soit $\phi \sim 42^\circ N$, nord car le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre ($\implies f > 0$). La position exacte du courantomètre est $42^\circ 13' 7'' N, 05^\circ 34' 5'' E$, soit au large de La Ciotat dans les Bouches du Rhône. Il s'agissait en fait d'une mesure faite à partir de la bouée laboratoire "Bohra" (Fig. 1.2). La nature du coup de vent (on est en été, il dure environ 2 jours avec des vitesses de l'ordre de 20 à 30 kn, commençant par le N et se terminant par l'Ouest) fait irrésistiblement penser au Mistral dans le golfe du Lion.

On déduit la vitesse moyenne du courant (c'est-à-dire filtrée des oscillations d'inertie) en pointant par exemple des intersections successives. Avant le coup de vent, la vitesse varie en direction du ESE à WNW mais est de l'ordre de 20cms^{-1} , la vitesse à laquelle est parcouru le cercle d'inertie ($V = \text{rayon du cercle multiplié par } f$) valant environ la moitié. Après le coup de vent, la vitesse est vers l'Ouest et vaut 45cms^{-1} , la vitesse dans les oscillations d'inertie valant 20cms^{-1} .

1.7 Trajectoire sur un plan incliné

On se situe dans un repère en rotation avec la vitesse angulaire Ω . Etudier la trajectoire d'une particule initialement au repos située sur un plan incliné (angle α) ? L'accélération de la pesanteur est $-g$. Que se passe-t-il pour des temps 'petits' ? Et pour les temps 'grands', quelle est la trajectoire en moyenne ? Quel est l'équilibre des forces de ce mouvement moyen ?

Corrigé

Corrigé. On intègre des équations du mouvement ($\frac{du}{dt} - fv = g\sin\alpha$, $\frac{dv}{dt} + fu = 0$, avec $f = 2\Omega\cos\alpha$ la projection du vecteur rotation sur la perpendiculaire au plan, l'axe des x étant orienté vers la plus grande pente) à partir du repos, ce qui donne

$$x(t) = -\frac{g\sin\alpha}{f^2}(\cos ft - 1) \quad (1.7)$$

$$y(t) = -\frac{g\sin\alpha}{f^2}\sin ft - \frac{g\sin\alpha}{f}t \quad (1.8)$$

La trajectoire est une cycloïde parcourue vers la droite (vers les y négatifs). Pour $t \ll 1/f$, on a $x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2 + o(t^3)$ et $y(t) = o(t^2)$. C'est un mouvement uniformément accéléré avec $g\sin\alpha$ qui ne voit pas la rotation. Pour $t \gg 1/f$, on a en moyenne $\langle x \rangle = \frac{g\sin\alpha}{f^2}$ et $\langle y \rangle = -\frac{g\sin\alpha}{f}t$. La vitesse est constante et perpendiculaire à la pente ! Cette vitesse est tout simplement la solution stationnaire de l'équation $\frac{du}{dt} - fv = g\sin\alpha$. Le mouvement complet s'obtient par la superposition de ce mouvement constant et d'une rotation à la vitesse angulaire f sur le cercle de rayon $\frac{g\sin\alpha}{f^2}$. C'est le "cercle d'inertie". De façon générale, la solution HOMOGENE des équations 1.7 et 1.8 est le cercle d'inertie de rayon V_0/f parcouru à la vitesse angulaire f , V_0 étant la vitesse à l'instant $t=0$. On parle aussi d'oscillations d'inertie.

1.8 Rayon de déformation à l'équateur

Formellement, il n'est pas possible de définir le rayon de déformation par $R_d = \frac{\sqrt{(\Delta\rho/\rho_0gh)}}{f}$ à l'équateur où le paramètre de Coriolis est nul. En utilisant un développement limité à l'ordre 1 de f , proposez une expression du rayon de déformation à l'équateur et calculez sa valeur pour $H = 200m$ et $\Delta\rho = 1kgm^{-3}$. On rappelle que le rayon de la terre vaut environ $6400km$.

Corrigé

Corrigé. A l'équateur, formellement le rayon de déformation est infini si on prend l'expression ci-dessus. Mais si on s'écarte légèrement vers le Nord ou

vers le sud, de la distance y , on va avoir $f = \beta y$ avec $\beta = \frac{2\Omega}{a}$ et on peut écrire $R_d(y) = \frac{c}{\beta y}$ avec $c = \sqrt{\Delta\rho/\rho_0 g h}$. Comme un mouvement d'échelle horizontale L va voir un paramètre de coriolis de l'ordre $f = \beta L$, il est logique de poser $R_d = L$ en $y=L$. On en déduit immédiatement $R_d = \sqrt{\frac{c}{\beta}}$. L'application numérique donne $R_d = 250\text{km}$. En conclusion : bien que $f \sim 0$ près de l'équateur, l'échelle des mouvements équatoriaux influencés par la stratification qui le sont aussi par la rotation est relativement petit, de l'ordre de 2 degrés de latitude. En bref, bien que $f=0$ à l'équateur, il faut tout de même tenir compte de la rotation. (A posteriori, on vérifie bien que l'approximation linéaire faite pour f est valable.)

1.9 Equations primitives sur la sphere

Les équations de Navier-Stokes écrites dans le repère local sur une sphère contiennent des termes géométriques supplémentaires (voir ci-dessous). Ils sont liés à la sphéricité de la terre. Pour quelles échelles spatiales des mouvements, ces termes sont-ils négligeables ?

$$\rho\left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan(\varphi)}{r} + \frac{uw}{r} + f_* w - f v\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \quad (1.9)$$

$$\rho\left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan(\varphi)}{r} + \frac{vw}{r} + f u\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \quad (1.10)$$

$$\rho\left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - f_* u\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + F_z \quad (1.11)$$

Corrigé

Dans l'équation de qdm selon x , il suffit de comparer la partie advective de $\frac{du}{dt}$ qui est d'ordre $\frac{U^2}{L}$ ou $\frac{UW}{H}$ avec les termes géométriques qui eux sont d'ordre $\frac{U^2}{a}$ ou $\frac{UW}{a}$. Ces termes sont négligeables pour $L \ll a$. On procède de même pour les 2 autres équations.

1.10 Théorème de Taylor-Proudman sur la sphere

Dans le cas général, montrer qu'un fluide homogène tournant rapidement ($R_0 \ll 0$), est bidimensionnel (c'est-à-dire que l'écoulement est dans un plan sans variation dans la direction perpendiculaire au plan) dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et non pas la verticale (on ne négligera plus les termes en f_*). Quelle application à un fluide géophysique pouvez-vous imaginer ?

Corrigé

Comme dans le cas à deux dimensions, il suffit de prendre le rotationnel des équations de qdm pour éliminer le gradient de pression. Les équations à prendre

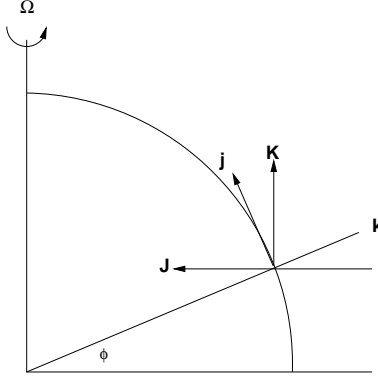


FIG. 1.3 – Changement de repère

sont donc (avec $\rho = 0$ car le fluide est homogène et avec $\rho_0 = 1$ pour simplifier) :

$$+f_*w - fv = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.12)$$

$$+fu = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.13)$$

$$-f_*u = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.14)$$

Deux méthodes sont possibles. La bonne et la mauvaise. La mauvaise consiste à faire directement le calcul du rotationnel des équations ci-dessus. On trouve 3 égalités difficiles à interpréter si on ne fait pas de changement de variable $xyz \rightarrow XYZ$ avec $X = x, Y = \sin\phi y - \cos\phi z, Z = \cos\phi y + \sin\phi z$ (voir Fig. 1.3). Attention : il faut faire le changement sur les composantes du vecteur vitesse (uvw devient UVW , ce qui donne par exemple $V = v\sin\phi - w\cos\phi$) mais aussi sur les dérivées partielles. On trouve :

$$f_*\partial_y u - f\partial_z u = 0 \quad (1.15)$$

$$f_*\partial_x u + f_*\partial_z w - f\partial_z v = 0 \quad (1.16)$$

$$f\partial_x u - f_*\partial_y w + f\partial_y v = 0 \quad (1.17)$$

qui après changement de variable donne $\partial_Z U = 0, \partial_Z V = 0, \partial_X U + \partial_Y V = 0$, qui est le résultat demandé. La bonne méthode consiste à se placer d'emblée dans le repère XYZ . Les équations du mouvement avec $R_0 \ll 1$ se réduisent alors à :

$$-2\Omega V = -\frac{\partial p}{\partial X} \quad (1.18)$$

$$+2\Omega U = -\frac{\partial p}{\partial Y} \quad (1.19)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial Z} \quad (1.20)$$

On se retrouve exactement dans le cas vu en cours mais cette fois ci, l'axe des Z est aligné avec le vecteur rotation et pas la verticale définie par le champs de gravité. cqfd.

1.11 Energie potentielle utilisable

On considère un canal de longueur infini, de largeur 100 km rempli de fluide homogène ρ et de profondeur $H = 1000m$. A l'instant initial sa surface est plane mais inclinée, la dénivellation entre les 2 bords étant de $\Delta h = 1m$. Calculez la variation d'énergie potentielle entre cet instant et un état final où la surface serait horizontale. En supposant que toute cette énergie soit convertie en énergie cinétique, calculez la vitesse du courant (on supposera que le courant est uniforme). Cet état vous paraît-il vraisemblable? En supposant que le courant est finalement de $U = 1ms^{-1}$, calculez Δh à partir de l'équilibre géostrophique et la variation d'énergie potentielle. Conclure.

Corrigé

à faire

1.12 Tourbillon de Rankine

Un tourbillon de Rankine est défini de la façon suivante : il est axisymétrique, la vitesse est strictement orthoradiale et vaut $u_\theta = \omega r$ pour $r \leq a$ et $u_\theta = \omega a^2/r$ pour $r \geq a$. Calculer et tracer le profil de vorticité.

Corrigé

à faire

Chapitre 2

Equilibre géostrophique

2.1 Altimétrie et équilibre géostrophique

Le satellite SEASAT qui a volé en 1978 a mesuré le niveau de la mer avec son altimètre. La figure 2.1 montre le signal mesuré "sous la trace" du satellite dans la région du Gulf Stream passage après passage à l'automne 1978. Localisez le Gulf Stream. Quelle est vitesse de surface du courant ? Quel est le nombre de Rossby associé ?

Corrigé

Le Gulf Stream est localisé là où la hauteur de la mer augmente plus ou moins linéairement (soit une pente $\Delta\eta/\Delta x$) vers $37^\circ N$. Cette augmentation est de l'ordre de $\Delta\eta = 1m$ sur $\Delta x = L = 100km$. On déduit de l'équilibre géostrophique $fV = g\partial_x\eta \simeq g\Delta\eta/\Delta x$, $V = 1ms^{-1}$ avec $f \sim 10^{-4}s^{-1}$ à $37^\circ N$. Le nombre de Rossby vaut $R_0 = V/fL = 0.1$. Notons que la pente d'ensemble de ce signal correspond aux variations de grande échelle du géoïde et qu'il est raisonnable d'affecter les variations de plus petite échelle à la topographie dynamique, et les variations de toute petite échelle à du bruit.

Principe de l'altimétrie

Le principe de l'altimétrie satellitale est illustré sur la figure 2.2. Il s'agit de connaître la topographie dynamique de la mer H qui est la distance entre la surface de la mer et le géoïde. On peut alors par géostrophie en déduire les vitesses de surface. On a $H = M - G = P - D - G$. Le signal mesuré par le satellite est le temps d'aller retour de l'écho radar qui permet d'accéder à la distance D entre le satellite et la surface de la mer. D est connue aujourd'hui avec une précision centimétrique au prix d'un traitement lourd (le temps d'aller retour de l'écho radar dépend largement du contenu en vapeur d'eau de l'atmosphère qu'il faut donc connaître). La position de l'orbite du satellite P est

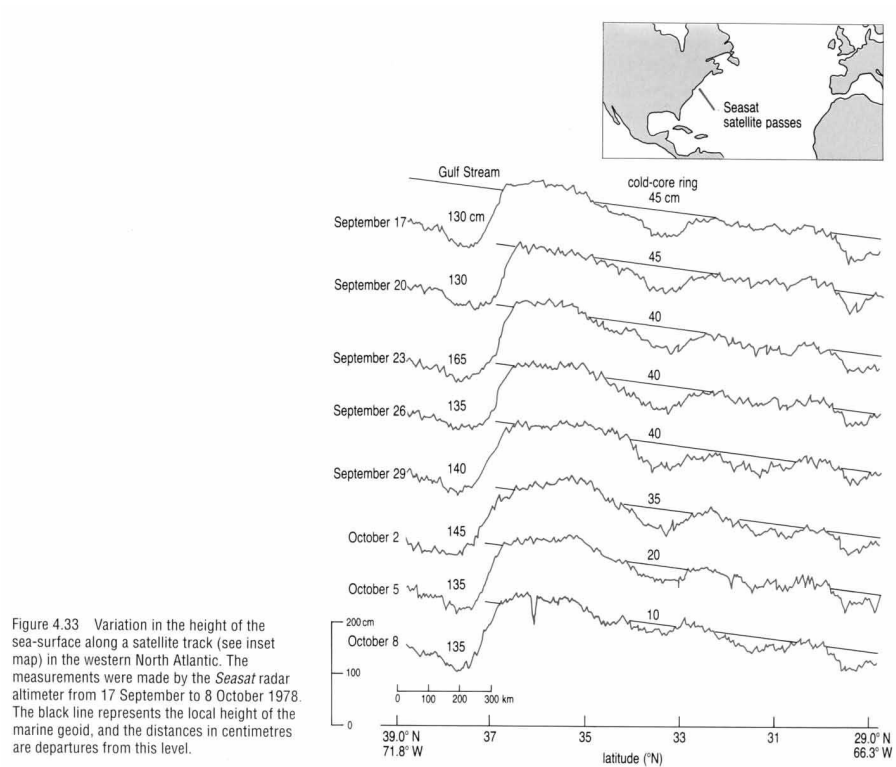


FIG. 2.1 – Mesure altimétrique des variations de hauteur de la mer au large de la côte Est de Etats-Unis faites par le radar du satellite Seasat du 17 Sept. au 8 Oct. 1978. La ligne noire représente le géoïde. D'après *Ocean Circulation*, The Open University, Penguin Press

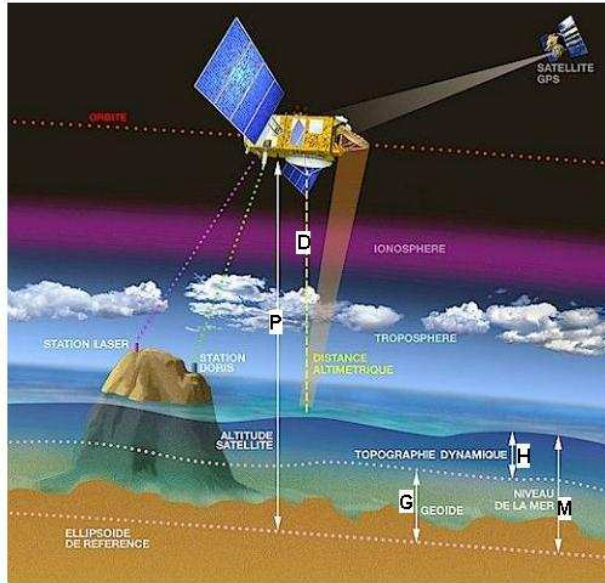


FIG. 2.2 – D'après http://www.jason.oceanobs.com/html/alti/principe_fr.html

aussi bien connue à partir des calculs d'orbite et d'un calage à partir des stations de localisation au sol (dont la position varie : dérive des continents, marées terrestres, ... tous phénomènes qu'heureusement on modélise avec une précision suffisante). Le problème est que G est aujourd'hui inconnu à la précision requise de quelques centimètres. La figure 2.3 montre par exemple le géoïde dans la région de la Méditerranée qui varie sur des dizaines de mètres sur des distances de 2 à 3000 km alors que l'on cherche un signal caractéristique des courants de surface en Méditerranée qui est de quelques cm à dizaines de cm sur des distances de quelques dizaines de km.

A noter également que pour exploiter H pour l'étude de la circulation générale océanique grâce à la géostrophie, il faut soustraire de la mesure H les mouvements rapides comme les marées océaniques (mais aussi les marées terrestres), les effets de la pression atmosphériques (baromètre inverse), ... Malgré tout cela, H aujourd'hui un signal exploité en routine par les océanographes et les centres de modélisation océanique opérationnelle comme MERCATOR (<http://www.mercator-ocean.fr>).

Pour des compléments sur l'altimétrie en océanographie, voir par exemple http://www.jason.oceanobs.com/html/alti/principe_fr.html.

TOPEX/Poseidon & ERS-1
Surface Moyenne de la Mediterranee

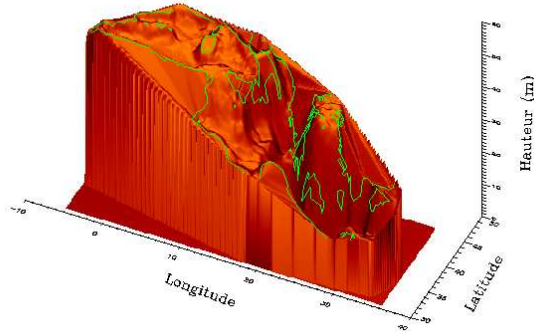


FIG. 2.3 – Altitude du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence dans la région de la Méditerranée

2.2 La gravité réduite

On considère les équations primitives pour un fluide homogène. Montrez que le gradient de pression s'écrit

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p = g \nabla \eta \quad (2.1)$$

où η est la cote de la surface de libre.

On suppose maintenant que le fluide comporte deux couches, de densité ρ_1 et ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). L'épaisseur de la première couche est h et on suppose que la deuxième couche reste au repos. Montrez que le gradient de pression dans les équations primitives s'écrit

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p = g' \nabla h \quad (2.2)$$

Donnez l'expression de g' et la calculez avec $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = 1\text{kgm}^{-3}$.

Corrigé

Il suffit de calculer la pression totale dans chaque couche et dériver ensuite. On définit η la cote de la surface libre, ξ celle de l'interface. On a donc $h = \eta - \xi$. La pression dans la couche 1 (soit $z \geq \xi$) vaut $p_1(z) = \rho_1 g (\eta - z)$ (c'est le poids par unité de surface de la colonne d'eau entre z et η). La pression dans la couche 2 (soit $z \leq \xi$) vaut $p_2(z) = p_1(\xi) + \rho_2 g (\xi - z)$. La deuxième couche étant au repos, les termes de gauche de l'équation de qdm sont tous nuls donc le gradient de la pression p_2 est nul aussi : $\nabla p_2 = 0 \Rightarrow \rho_1 \nabla \eta = (\rho_2 - \rho_1) \nabla \xi$. On conclut en remplaçant η par son expression en fonction de h dans $\nabla p_1 = \rho_0 g \nabla \eta$. On

suppose que $\rho_1 \sim \rho_2 \sim \rho_0$, ce qui donne $g' = g(\rho_2 - \rho_1/\rho_0)$, soit $g' = 0.01\text{ms}^{-2}$. Mais on pourrait très bien faire le calcul sans cette approximation. On aurait alors $\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2\nabla h$.

2.3 Equilibre géostrophique en gravité réduite

A $38^\circ N$, l'analyse des caractéristiques hydrologiques de Gulf Stream permet de schématiser l'écoulement avec le modèle suivant : c'est un milieu à deux couches dans lequel la couche de surface, plus chaude, a une densité $\rho_1 = 1025\text{kgm}^{-3}$ et la couche inférieure, a une densité $\rho_2 = 1029\text{kgm}^{-3}$. La profondeur de l'interface varie avec la latitude y (évaluée ici en km à partir d'une latitude arbitraire) :

$$h(y) = H - \Delta H \tanh(y/L) \quad (2.3)$$

où $H = 500m$, $\Delta H = 300m$ et $L = 60km$.

Déterminez le courant en surface en supposant que celui-ci est en équilibre géostrophique et que la couche inférieure reste au repos. Quelle est la vitesse maximum du Gulf Stream et où ce maximum se produit-il ? Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Rossby ?

Corrigé

C'est une application directe de l'exercice précédent. On a $fu = g'\Delta H/(L\cosh^2(y/L))$. Le maximum se produit en $y=0$ et vaut $U_{max} = g'\Delta H/fL$. Le nombre de Rossby vaut $R_0 = U_{max}/fL = g'\Delta H/f^2L^2$. On note qu'on a bien une vitesse vers l'Est comme au large de la côte Est des USA après que le Gulf Stream se soit détaché de la côte et commence à traverser l'Atlantique vers l'Europe. Pour se familiariser avec les signes des équations de l'équilibre géostrophique et les orientations des axes, refaire l'exercice avec le Gulf Stream qui coulerait le long des côtes américaines orientées Nord Sud.

2.4 Equilibre géostrophique dans un océan à deux couches

Vers $38^\circ N$, l'analyse des caractéristiques hydrologiques de Gulf Stream et des données de l'altimètre de Seasat permet de schématiser une section perpendiculaire au courant avec le modèle suivant : c'est un milieu à deux couches dans lequel la couche de surface, plus chaude, a une densité $\rho_1 = 1025\text{kgm}^{-3}$ et la couche inférieure, a une densité $\rho_2 = 1029\text{kgm}^{-3}$, la profondeur totale du fluide étant H_T . La côte de la surface η et la profondeur de l'interface h varient avec la latitude y (évaluée ici en km à partir d'une latitude arbitraire) :

$$\eta(y) = -\Delta\eta \tanh(y/L) \quad (2.4)$$

$$h(y) = H - \Delta H \tanh(y/L_h) \quad (2.5)$$

Déterminez le courant dans chaque couche. A quelle condition, le courant dans la couche inférieure est-il de sens opposé à celui du courant de surface? Calculer le transport (débit) total du courant. Conclure.

Pour l'application numérique, on prendra $H_T = 4000m$, $H = 500m$, $\Delta H = 300m$, $\Delta\eta = 1m$ et $L = 60km$.

Corrigé

Comme dans l'exercice précédent, on a pour la couche de surface (suffixe 1)

$$f u_1 = -g \partial_y \eta = g \frac{\Delta\eta}{L} \frac{1}{\cosh^2(y/L)}$$

De l'exercice 2.2, on déduit

$$\nabla(p_1 - p_2) = -(\rho_2 - \rho_1)g\nabla\xi$$

et comme $u_1 - u_2 = -1/\rho_0 \partial_y(p_1 - p_2)$ il vient

$$u_1 - u_2 = \epsilon g / f \partial_y \xi = g' / f \partial_y \xi$$

avec $\epsilon = \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$. On retrouve une équation pour le modèle à 2 couches qui est l'équivalent de celle du vent thermique pour un océan continuellement stratifié en z . Le courant dans la couche inférieure vaut

$$u_2 = \frac{g}{fL} \frac{\Delta\eta - \epsilon\Delta H}{\cosh^2(y/L)}$$

Pour que u_2 soit négatif opposé à celui du u_1 , il faut que

$$\Delta\eta < \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \Delta H$$

On remarque que, conformément à l'exercice précédent, si il y a égalité, alors $u_2 \equiv 0$. Le transport total s'obtient par

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1(\eta - \xi) + u_2(\xi + H_T)) dy = g/f \int_{-\infty}^{+\infty} (-\partial_y \eta(\eta - \xi) - (\partial_y \eta + \epsilon \partial_y \xi)(\xi + H_T)) dy$$

et finalement

$$D = \frac{g}{2f} [-\epsilon\eta^2 - \xi^2 - 2H_T(\eta + \epsilon\xi)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{g}{f} [H\Delta H - H_T(\epsilon\Delta H - \Delta\eta)]$$

On constate que le débit ne dépend pas de la forme de la surface et de l'interface mais uniquement de la différence de leur niveau de part et d'autre du courant. En particulier, si $\epsilon\Delta H = \Delta\eta$ (i.e. courant nul en profondeur), alors le débit de la première couche est simplement proportionnel à la différence des épaisseurs de la première couche de part et d'autre du courant.

Application numérique : $u_{1max} = 1m/s$, $u_{2max} = -0.2m/s$ et $D = -2 \cdot 10^7 m^2/s$ ou 20 Sv (le Sverdrup = $10^6 m^2/s$ est l'unité de mesure du débit des courants en océanographie).

2.5 Vent thermique

Dans une certaine région de l'atmosphère, la température de l'atmosphère décroît vers le nord avec un taux de 1°K pour 35km . On suppose que la température ne varie pas avec l'altitude. S'il n'y a pas de vent près du sol, quelle est la vitesse à une altitude de 2km ? La pression au sol est supposée uniforme (i.e. le gradient de pression est nul au sol). Pour les calculs, on prendra $g = 10\text{m.s}^{-2}$, un paramètre de Coriolis de 10^{-4}s^{-1} et une température moyenne de 290°K .

Corrigé

Dans cet exercice, le choix de ρ ou ρ_0 dans l'équation géostrophique et l'ordre du calcul sont importants. Le plus simple est de calculer le champ de pression (c'est ce qu'incite à faire l'énoncé qui indique que la pression au sol est constante). On a $p = \rho RT$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

2.6 Equilibre cyclostrophique : Tourbillon de Rankine

Un tourbillon de Rankine est défini de la façon suivante : il est axisymétrique, la vitesse est strictement orthoradiale et vaut $u_\theta = \omega r$ pour $r \leq a$ et $u_\theta = \omega a^2/r$ pour $r \geq a$. Dans un océan homogène dans le plan f, on considère un tourbillon de Rankine isolé.

1. En supposant que l'équilibre géostrophique, calculer l'élévation de la surface.
2. Calculer le nombre de Rossby en fonction du rayon. On ne néglige plus l'accélération relative. Calculer de nouveau l'élévation de la surface en incluant l'accélération relative. Commenter en fonction du signe de ω .

Corrigé

à faire

2.7 Campagne MEDIPROD : Vent thermique

Pendant la campagne MEDIPROD 5 en 1987 (les campagnes MEDIPROD avaient pour objectif de mieux comprendre l'impact des mouvements à mésoéchelle sur la production primaire océanique en Méditerranée), le N/O Le Suroît a fait des mesures de température et de salinité au large de l'Algérie le long d'une section (on parle de section hydrologique) à peu près perpendiculaire à la côte. A partir de ces données (fichier `sadb0.t` et fichier `sadb0.s`), on a calculé la densité (fichier `sadb0.r`) et la densité potentielle (fichier `sadb0.rp`). La première ligne du

fichier donne le nombre de stations puis la distance à la côte des stations. Les lignes suivantes donnent la profondeur puis la densité pour chaque station.

1. En utilisant votre logiciel préféré (matlab, ...), tracer une coupe verticale de la température, de la salinité et de la densité potentielle.
2. Calculer et tracer la vitesse géostrophique en supposant que la vitesse à 2500m est nulle. En déduire la hauteur de la surface et la tracer.
3. Commenter ces graphiques à partir de ce que vous savez de la circulation en Méditerranée (cours MF208, web, ...).

Les fichiers sont à télécharger sur
<http://www.ensta.fr/oceano/depot/sadb0.t,sadb0.s,...>

```
fichier de température potentielle sadb0.t
9.000 7263 13484 18362 24040 29856 35181 40730 46514 51671
5.000 19.0016 18.9825 18.7273 18.7403 18.7889 18.8830 17.2380 17.7774 17.9233
15.000 18.8417 18.6758 18.7005 18.7253 18.7801 18.7981 17.2932 17.8091 17.8471
20.000 19.0581 16.3822 18.6274 18.7180 18.5354 16.8476 18.0184 17.7206 17.8002
40.000 16.3606 15.7029 18.1961 18.1190 17.5119 14.6748 17.1355 15.7237 15.9079
60.000 15.7374 15.6899 15.2320 14.9649 14.3326 13.8062 13.9001 13.8874 13.9235
80.000 15.1404 15.1139 14.3169 14.1776 13.7047 13.2883 13.3673 13.3643 13.4384
100.000 15.0442 14.4453 14.0522 13.6262 13.2311 13.0757 13.1935 13.1551 13.2043
120.000 14.8504 14.0773 13.4858 13.2391 13.0511 13.0617 13.0048 13.1015 13.1128
140.000 13.9922 13.6251 13.1860 13.0277 13.0439 13.0281 12.9655 12.9297 13.0811
160.000 13.2848 13.2087 13.0543 13.0091 13.0144 12.9921 12.9845 13.0162 13.0743
180.000 13.0758 13.0687 12.9455 12.9232 13.0053 13.0161 13.0124 13.0745 13.0838
200.000 12.9084 13.0169 13.0355 13.0109 13.0205 13.0456 13.0486 13.0955 13.0632
220.000 12.8456 13.0296 12.9215 13.0223 13.0345 13.0560 13.0614 13.1073 13.0747
240.000 12.9404 13.0480 13.0265 13.0322 13.0413 13.0811 13.0857 13.1213 13.0766
260.000 12.9573 13.0449 13.0349 13.0443 13.0563 13.0954 13.1187 13.1380 13.0756
280.000 12.9756 13.0415 13.0475 13.0577 13.0573 13.1122 13.1314 13.1412 13.0852
300.000 12.9633 13.0512 13.0620 13.0691 13.0879 13.1086 13.1348 13.1387 13.1363
320.000 13.0092 13.0731 13.0832 13.0751 13.1092 13.1267 13.1400 13.1341 13.0805
340.000 13.0316 13.0687 13.0818 13.1035 13.0799 13.1198 13.1244 13.1254 13.0697
360.000 13.0434 13.0683 13.0846 13.1202 13.0770 13.1103 13.1138 13.1050 13.0671
380.000 13.0504 13.0617 13.0729 13.1039 13.0919 13.0955 13.1034 13.0763 13.0662
400.000 13.0663 13.0604 13.0689 13.0758 13.0666 13.0822 13.0698 13.0615 13.0484
420.000 13.0700 13.0575 13.0797 13.0714 13.0240 13.0668 13.0483 13.0452 13.0308
```

440.000 13.0708 13.0509 13.0508 13.0614 13.0415 13.0399 13.0446 13.0259 13.0152
460.000 13.0677 13.0468 13.0358 13.0332 13.0248 13.0211 13.0240 13.0100 12.9989
480.000 13.0347 13.0084 12.9820 13.0242 13.0140 12.9999 13.0134 12.9890 12.9853
500.000 13.0311 12.9908 12.9715 13.0102 12.9955 12.9875 12.9932 12.9748 12.9702
520.000 13.0043 12.9704 12.9597 12.9924 12.9837 12.9709 12.9817 12.9615 12.9516
540.000 12.9750 12.9479 12.9337 12.9777 12.9656 12.9555 12.9645 12.9461 12.9418
560.000 12.9654 12.9321 12.9149 12.9694 12.9538 12.9427 12.9516 12.9347 12.9302
580.000 12.9401 12.9227 12.9078 12.9516 12.9409 12.9320 12.9456 12.9217 12.9212
600.000 12.9223 12.9127 12.8905 12.9313 12.9331 12.9182 12.9363 12.9103 12.9095
620.000 12.9102 12.9070 12.8809 12.9203 12.9186 12.9128 12.9232 12.8984 12.8996
640.000 12.9005 12.9008 12.8768 12.9104 12.9089 12.9074 12.9109 12.8880 12.8874
660.000 12.8936 12.8897 12.8701 12.9042 12.8952 12.8989 12.9023 12.8800 12.8777
680.000 12.8877 12.8833 12.8640 12.8889 12.8886 12.8886 12.8905 12.8732 12.8710
700.000 12.8806 12.8762 12.8584 12.8786 12.8816 12.8784 12.8793 12.8639 12.8645
720.000 12.8755 12.8686 12.8548 12.8657 12.8763 12.8681 12.8741 12.8589 12.8575
740.000 12.8730 12.8633 12.8420 12.8596 12.8687 12.8603 12.8696 12.8528 12.8541
760.000 12.8706 12.8529 12.8365 12.8573 12.8626 12.8529 12.8677 12.8446 12.8454
780.000 12.8682 12.8431 12.8318 12.8425 12.8554 12.8468 12.8608 12.8375 12.8412
800.000 12.8658 12.8410 12.8280 12.8404 12.8495 12.8446 12.8498 12.8325 12.8338
900.000 12.8537 12.8304 12.8181 12.8298 12.8384 12.8337 12.8386 12.8224 12.8236
1000.000 12.8416 12.8197 12.8082 12.8192 12.8272 12.8229 12.8275 12.8122 12.8134
1100.000 12.8295 12.8091 12.7984 12.8086 12.8161 12.8120 12.8163 12.8021 12.8032
1200.000 12.8174 12.7984 12.7885 12.7980 12.8049 12.8012 12.8051 12.7919 12.7929
1300.000 12.8052 12.7878 12.7786 12.7874 12.7938 12.7903 12.7940 12.7818 12.7827
1400.000 12.7931 12.7771 12.7687 12.7767 12.7826 12.7795 12.7828 12.7716 12.7725
1500.000 12.7810 12.7665 12.7588 12.7661 12.7715 12.7686 12.7716 12.7615 12.7623
1600.000 12.7689 12.7558 12.7489 12.7555 12.7603 12.7577 12.7605 12.7513 12.7520
1700.000 12.7568 12.7452 12.7391 12.7449 12.7492 12.7469 12.7493 12.7412 12.7418
1800.000 12.7447 12.7345 12.7292 12.7343 12.7380 12.7360 12.7382 12.7310 12.7316
1900.000 12.7326 12.7239 12.7193 12.7237 12.7269 12.7252 12.7270 12.7209 12.7214
2000.000 12.7205 12.7132 12.7094 12.7131 12.7157 12.7143 12.7158 12.7107 12.7111
2100.000 12.7084 12.7026 12.6995 12.7024 12.7046 12.7034 12.7047 12.7006 12.7009
2200.000 12.6963 12.6919 12.6896 12.6918 12.6934 12.6926 12.6935 12.6904 12.6907
2300.000 12.6842 12.6813 12.6798 12.6812 12.6823 12.6817 12.6823 12.6803 12.6805

Corrigé

à faire

2.8 Campagne MEDIPROD : Méthode dynamique

Il s'agit ici d'appliquer le calcul tel qu'il est pratiqué par les océanographes qui préfèrent utiliser une quantité plus parlante "la hauteur dynamique" ou l'anomalie de hauteur dynamique (on parle aussi de hauteur stérique). La hauteur dynamique H_d de l'isobare p_1 par rapport à l'isobare de référence p_0 est tout simplement leur distance verticale en chaque point. C'est donc un champ scalaire susceptible d'être visualisé dans le plan horizontal, avec des isolignes, ce qui fait son intérêt pour les océanographes comme on va le comprendre.

1. Montrer que

$$H_d = \int_{z(p_0)}^{z(p_1)} dz(p) = - \int_{p_0}^{p_1} \frac{1}{\rho g} dp$$

2. Dans la pratique, il est plus commode de travailler avec l'anomalie de hauteur dynamique ΔH_d , c'est-à-dire, la différence de hauteur entre la hauteur dynamique définie ci-dessus et la distance qui sépare les mêmes isobares au repos dans un fluide de référence de salinité 35 p.s.u., de température nulle. Montrez que

$$\Delta H_d = - \int_{p_0}^{p_1} \frac{\alpha}{g} dp \text{ avec } \alpha = v_s(S, T, p) - v_s(35, 0, p) \quad (2.6)$$

où $v_s = \rho^{-1}$ est le volume spécifique.

3. Montrer encore qu'avec une bonne approximation sur z_0 et z_1 (on discutera le choix de z_0 et z_1)

$$H_d = \int_{z_0}^{z_1} \epsilon dz \text{ avec } \epsilon = \frac{\rho(S, T, p)}{\rho(35, 0, p)} - 1 \text{ est l'anomalie relative de densité.} \quad (2.7)$$

4. En supposant que la vitesse à la pression p_0 (ou à la profondeur z_0) est nulle, montrer que la vitesse à p_1 (ou à z_1) vaut :

$$u = -\frac{g}{f} \partial_y H_d \text{ ou } f \text{ est le paramètre de Coriolis.} \quad (2.8)$$

On prendra pour simplifier $\rho(35, 0, p) = \rho_0 = \text{Cste}$. Commenter, en particulier dans le cas où on se place à la surface ($p_1 = 0$ ou $z_1 = 0$).

5. Enfin, calculer et tracer la hauteur dynamique de la surface par rapport à 250 bars (ou 2500m) avec les données de la section hydrologique de MEDI-PROD de l'exercice précédent. Le profil $\rho(35, 0, p)$ aux mêmes profondeurs que dans les fichiers de l'exercice précédent se trouve dans le fichier ref35.r. Commenter.

Corrigé

à faire

Chapitre 3

Circulations axi-symétriques dans l'atmosphère

3.1 Introduction

Le but de cette séance de TD est de contruire étape par étape un modèle, le plus simple possible, qui rende compte des principales caractéristiques axi-symétriques des circulations atmosphériques dans la bande intertropicale et jusqu'aux moyennes latitudes. On suppose ainsi qu'il n'y aucune dépendance du modèle avec la longitude, ce qui n'est pas très éloigné de la réalité en première approximation et que les variables ne dépendent donc que de la latitude φ et de l'altitude z au dessus de la surface de la terre de rayon a . Les figures 1 et 2, illustrent les circulations méridiennes que le modèle de Held et Hou essayent de reproduire. Ces caractéristiques peuvent se résumer comme suit :

- Présence de vents d'ouest en altitude (soufflant vers l'est !; westerlies en anglais) au nord et au sud de l'équateur.
- Présence d'une cellule de circulation fermée méridienne symétrique par rapport à l'équateur qui est limitée à environ 30^0 au nord et au sud de l'équateur. Ce sont les cellules de Hadley.
- Présence d'un maximum des vents d'ouest au sommet de l'atmosphère juste au nord et au sud des cellules.
- Présence des vents alizés (soufflant vers le SO (resp. NO) au nord (resp. sud) de l'équateur ; easterlies ou trade winds en anglais).

Dans presque tout ce qui suit, pour simplifier les calculs, on utilisera le fait que la latitude de ces mouvements n'est trop grande et l'on utilisera la distance y de la particule à l'équateur $y \approx a\varphi$, avec $\sin(\varphi) \approx \varphi$ et $\cos(\varphi) \approx 1 - \varphi^2$

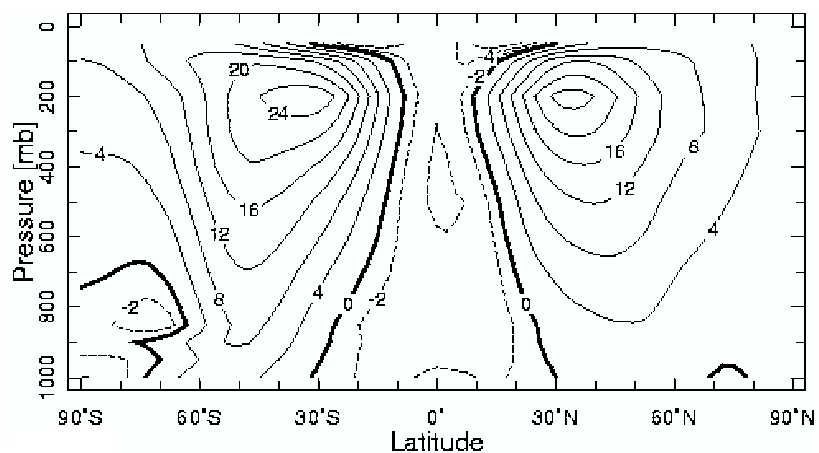


FIG. 3.1 – Section méridienne du vent zonal (ms^{-1}) en moyenne annuelle.

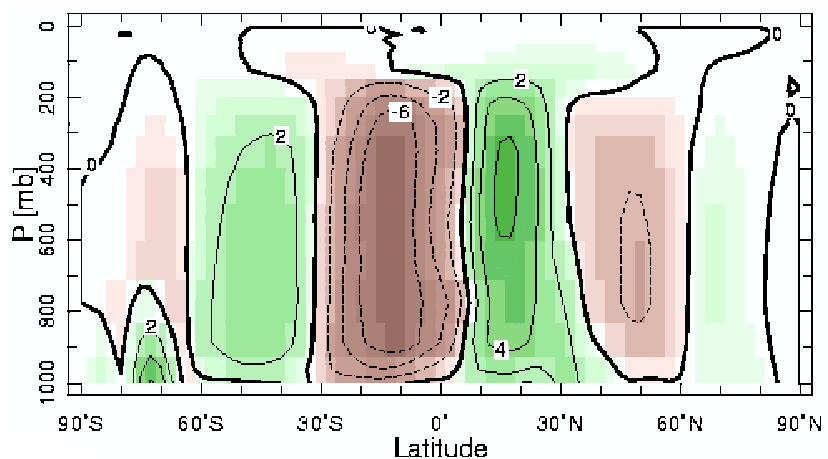


FIG. 3.2 – Fonction de courant méridienne en moyenne annuelle. Les unités sont en $10^{10} kgs^{-1}$. L'écoulement est dans le sens (resp. inverse) des aiguilles d'une montre autour des centres positifs (resp. négatifs). Ainsi, en moyenne annuelle, l'air monte légèrement au nord de l'équateur pour redescendre vers $\pm 30^{\circ}$.

3.2 Equations du modèle de Held et Hou

Les équations sont stationnaires. Elles utilisent l'approximation de Boussinesq et l'hypothèse hydrostatique. Elles sont écrites ici en coordonnées sphériques mais leur version en coordonnées cartésiennes sur le plan β est aussi utilisée.

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}u) - fv - \frac{uv \tan(\varphi)}{a} = \partial_z(\nu \partial_z u) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}v) + fu + \frac{u^2 \tan(\varphi)}{a} = -\frac{1}{a} \partial_\varphi \Phi + \partial_z(\nu \partial_z v) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\Theta) = -\frac{\Theta - \Theta_E}{\tau^{-1}} + \partial_z(\nu \partial_z \Theta) \quad (3.3)$$

$$\nabla(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.4)$$

avec $\mathbf{v} = (v, w)$. Les conditions aux limites sont les suivantes

$$\text{en } z=0 : w = 0 ; \partial_z \Theta = 0 ; \nu \partial_z u = Cu ; \nu \partial_z v = Cv \quad (3.5)$$

$$\text{en } z=H : w = 0 ; \partial_z u = \partial_z v = \partial_z \Theta = 0 \quad (3.6)$$

La distribution de température en équilibre radiatif suivante schématise bien ce qui est observé

$$\Theta_E(\varphi, z) = \Theta_0 - \frac{\Delta \Theta_H}{3} (3 \sin^2(\varphi) - 1) + \Delta \Theta_v \left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.7)$$

En coordonnées sphériques, l'opérateur ∇ s'écrit $(\frac{1}{a \cos \varphi} \partial_\varphi \cos \cdot, \partial_z \cdot)$.

3.3 Conservation du moment cinétique

On explique ici la présence de vents d'ouest de part et d'autre de l'équateur en supposant qu'il n'y a pas de variations sur verticale. On se référera à l'annexe pour l'explication de la localisation (à l'équateur) et la valeur du maximum de moment cinétique ($M_{max} = \Omega a^2$).

On suppose donc que le moment cinétique d'une particule ne peut excéder $M_{max} = \Omega a^2$ la valeur du moment cinétique d'une particule au repos à l'équateur. Le moment cinétique d'une particule de vitesse zonale u_M à la latitude φ vaut $M = (\Omega a \cos(\varphi) + u_M) a \cos(\varphi)$. Si cette particule est déplacée depuis l'équateur vers le nord à partir du repos, sa vitesse devient

$$u_M = \Omega a \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} \text{ et pour simplifier } u_M = \Omega \frac{y^2}{a} \quad (3.8)$$

On a bien des vents vers l'ouest, mais à 30° N, on atteint 127 ms^{-1} , ce qui est beaucoup trop élevé. En fait, ou bien le moment de la particule à l'équateur est inférieur à M_{max} (et la vitesse est négative vers l'ouest) ou bien il faut considérer les forces qui s'appliquent sur la particule. On conclut néanmoins qu'il existe $\forall \varphi$ pas trop grandes, une borne $u_{Mmax} = \Omega a y^2$ à la vitesse vers l'ouest.

3.4 Equilibre radiatif et Vent thermique

En fait, il existe un gradient de pression de l'équateur vers les pôles dû au gradient de température qui résulte du bilan radiatif local donné par (8). Ce gradient de pression peut équilibrer la force de Coriolis qui est associée à la vitesse zonale de la particule. On prendra le profil donné par l'égalité (8) avec $\Delta\Theta$ qui représente la gradient équateur-pôles de température, soit $\overline{\Theta_E}(\varphi) = \Theta_0 - \frac{\Delta\Theta_H}{3}(3\sin^2(\varphi) - 1)$ et dans la bande tropicale on a $\overline{\Theta_E}(y) \approx \overline{\Theta_E}(y = 0) - \Delta\Theta_H \frac{y^2}{a^2}$ (\overline{m} représente la moyenne sur la verticale $\frac{1}{H} \int_0^H m dz$). On prendra $\Delta\Theta_H = 100^0 K$ pour les applications numériques.

On a un vent thermique u_T tel que

$$f \partial_z u_T = -\frac{g}{\Theta_0} \partial_y \Theta_E \text{ avec } f = 2\Omega \sin(\varphi) \approx 2\Omega \frac{y}{a}$$

En intégrant de $z=0$ à H et en supposant que la vitesse est nulle au sol $u_T(z = 0) = 0$ (Held et Hou font cette hypothèse sur la base des solutions numériques du système complet d'équations en annexe 1 qui donnent bien $u(z = 0) \ll u(z = H)$), il vient

$$u_T(z = H) = \frac{g}{\Omega a} \frac{\Delta\Theta_H}{\Theta_0} H$$

Au sommet de l'atmosphère ($z=H$), on a donc $u_T(H) = R\Omega a$ avec $R = \frac{L^2}{a^2}$, $L = \frac{NH}{\Omega}$ et $N^2 = g \frac{\Delta\Theta_H}{\Theta_0 H}$; L et N sont des notations que l'on prend par analogie avec le rayon de déformation de Rossby et la fréquence Brünt-Väisälä (mais ici N n'est pas la fréquence de Brünt-Väisälä. Au fait, avec la distribution de température (8) à quoi celle-ci est-elle égale?).

Mais cette vitesse déduite de l'équilibre géostrophique doit vérifier la contrainte imposée par la conservation du moment cinétique, soit $u_T \leq u_M$, ce qui n'est possible que pour $y \geq L$. On obtient ainsi une bande de latitude à l'extérieur de laquelle on peut se contenter d'un vent thermique résultant du gradient de température de l'équilibre radiatif mais à l'intérieur de laquelle cet équilibre n'est pas possible. Il faut donc considérer pour $y \leq L$ ou bien que la température n'est pas celle de l'équilibre radiatif ou bien qu'il existe des mouvements ($v, w \neq 0$), ou bien les deux.

Avec les valeurs numériques choisies, on trouve la latitude de $27^0 N$, soit à peu près l'extension des cellules de Hadley. Ce n'est déjà pas si mal!

3.5 Circulations méridienne et verticale

On utilise maintenant l'équation du vent thermique pour déterminer Θ à partir de u_M dans la cellule de Hadley (et non plus u_T à partir de Θ_E comme précédemment). On suppose toujours que $u_M(z = 0) \ll u_M(z = H)$. Il vient

$$\frac{f}{H} u_M(H) = -\frac{g}{\Theta_0} \partial_y \overline{\Theta}$$

On intègre à partir de l'équateur, en supposant que $u_M(z = H)$ vaut 0 à l'équateur (voir en annexe la justification), on obtient

$$\bar{\Theta}(y) - \bar{\Theta}(0) = -\frac{\Theta_0}{Hg} \int_0^y f u_M(z = H) dy = -\frac{2\Omega^2 \Theta_0}{a^2 g H} \int_0^y y^3 dy$$

soit finalement

$$\bar{\Theta}(y) = \bar{\Theta}(0) - \Theta_0 \frac{\Omega^2}{2a^2 g H} y^4, \text{ pour } y < y_H$$

y_H étant la limite nord de la cellule de Hadley, encore à déterminer.

La cellule de Hadley étant fermée ($v(y = y_H, \forall z) = 0$), et les conditions aux limites $w = \partial_z \Theta = 0$ en $z=0$ et en $z=H$, permettent d'écrire que le contenu thermique de la cellule est conservé (on intègre (3) de $y=0$ à $y = y_H$ et de $z=0$ à $z=H$ et le membre de droite donne une contribution nulle de même que le terme de diffusion verticale). Il vient

$$\int_0^{y_H} \bar{\Theta} dy = \int_0^{y_H} \bar{\Theta}_E dy$$

d'où on déduit

$$\bar{\Theta}(0) - \Theta_0 \frac{\Omega^2}{10a^2 g H} y_H^4 = \bar{\Theta}_E(0) - \frac{\Delta \Theta_H}{3a^2} y_H^2 \quad (3.9)$$

De (10) et de la condition de continuité $\bar{\Theta}(y_H) = \bar{\Theta}_E(y_H)$, on déduit facilement

$$\bar{\Theta}(0) = \bar{\Theta}_E(0) - \frac{5}{18} R \Delta \Theta_H \quad (3.10)$$

$$y_H = \sqrt{\frac{5}{3}} L \quad (3.11)$$

y_H est supérieur à la valeur L obtenue en supposant une cellule de Hadley contrôlée par la distribution de température $\bar{\Theta}_E$. Ceci a pour conséquence la présence d'un maximum de vitesse zonale au sommet d'atmosphère au nord de la cellule de Hadley. On progresse!

3.6 Effet de la viscosité

A ce stade, sont connus : la distribution de vitesse zonale au sommet de l'atmosphère, celle de la température effective qui diffère de la température résultant de l'équilibre radiatif, le cisaillement vertical de vitesse zonale qui dérive du gradient méridien de température, et enfin l'extension méridienne de la cellule de Hadley qui résulte du fait que la cellule de Hadley n'échange pas de chaleur avec les latitudes plus élevées. Il reste à exploiter le fait que la vitesse

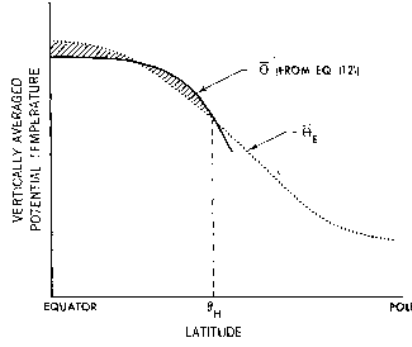


FIG. 3.3 – Distribution méridienne de la température moyenne sur la verticale $\bar{\Theta}$ et $\bar{\Theta}_E$. On constate qu'il fait moins chaud à l'équateur que du fait du simple équilibre radiatif.

zonale au sol est nulle du fait du frottement et que le moment cinétique est conservé.

On peut encore exploiter l'équation de conservation de la chaleur dans la cellule de Hadley, qui intégrée sur la verticale, donne

$$\partial_y(\bar{v}\bar{\Theta}) = \frac{\bar{\Theta} - \bar{\Theta}_E}{\tau}$$

et en intégrant à partir de $y=0$ (où $v=0$), il vient après simplifications

$$\bar{v}\bar{\Theta}(y) = -\frac{5}{18} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{a\Delta\Theta_H}{\tau} R^{\frac{3}{2}} \left(\frac{y}{y_H} - 2\frac{y^3}{y_H^3} + \frac{y^5}{y_H^5} \right)$$

En supposant en plus que le transport méridien de chaleur a lieu dans 2 couches bien mélangées au sol et au sommet de l'atmosphère, chacune de ces couches ayant le même débit V ($+V$ en $z=H$ et $-V$ en $z=0$), on peut écrire

$$\frac{1}{H} \int_0^H v\Theta dz = \bar{v}\bar{\Theta} \approx \frac{V}{H} (\Theta(z=h) - \Theta(z=0)) = -\frac{V}{H} \Delta\Theta_v$$

On fait de même pour l'équation de quantité du moment cinétique (12) :

$$\partial_y(\bar{v}\bar{u}) = -Cu(y, z=0)$$

et aussi

$$\bar{v}\bar{u} = \frac{1}{H} \int_0^H vudz \approx \frac{V}{H} (u(y, z=h) - u(y, z=0)) \approx \frac{V}{H} u(y, z=h)$$

De ces égalités, en éliminant V , on déduit la distribution méridienne de vitesse zonale au sol

$$Cu(z=0) \approx -\frac{25}{18} \frac{\Omega a H \Delta \Theta_H}{\tau \Delta \Theta_v} R^2 \left[\left(\frac{y}{y_H} \right)^2 - \frac{10}{3} \left(\frac{y}{y_H} \right)^4 + \frac{7}{3} \left(\frac{y}{y_H} \right)^6 \right]$$

$u(z=0)$ est négatif (alizés) pour $y \leq \sqrt{\frac{3}{7}} y_H$ et positif (vents d'ouest) pour $\sqrt{\frac{3}{7}} y_H \leq y \leq y_H$.

La figure 4 montre u en fonction de la latitude et fait bien apparaître les alizés plus intenses au sol qu'en altitude au voisinage de l'équateur, un maximum pour les vents d'ouest au sommet de la branche descendante de la cellule de Hadley. La figure 5 montre que l'on a bien un flux de chaleur et de moment cinétique vers le nord. Comme on pouvait l'imaginer puisque que le moment cinétique de l'atmosphère doit être conservé dans la cellule de Hadley, le flux de moment cinétique vers le Nord (dans la cellule Nord) s'explique par le gain de moment cinétique au sol dû à la friction au sol dans la région des alizés (la terre a tendance à accélérer vers l'est l'atmosphère car $u < 0$) qui doit compenser la perte dans la région des vents d'ouest (la terre ralentit l'atmosphère car $u > 0$).

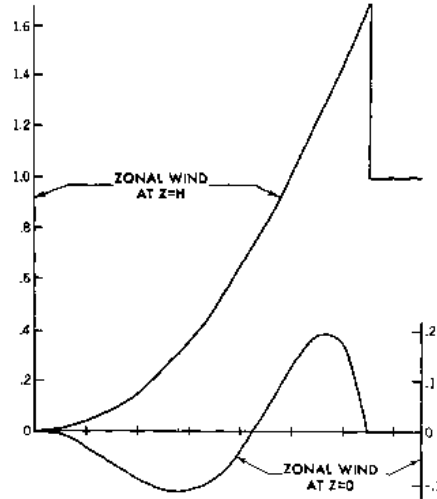


FIG. 3.4 – Distribution de vent zonal au sol et au sommet de l'atmosphère en fonction de la latitude.

3.7 Annexe : Maximum du moment cinétique

Ce théorème est dit "Théorème de Hide". En supposant que l'écoulement soit stationnaire, la conservation du moment angulaire par unité de masse s'écrit

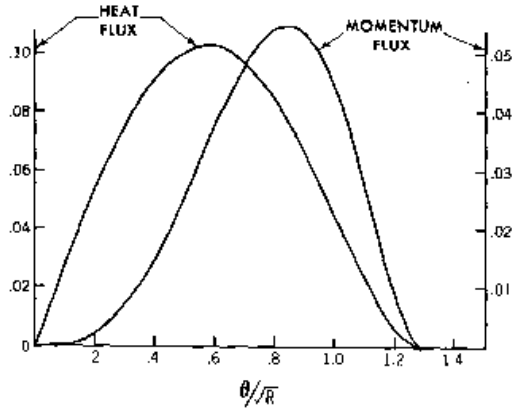


FIG. 3.5 – Distribution des flux de chaleur et de moment cinétique en fonction de la latitude.

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}M) = \partial_z \nu \partial_z M \text{ avec } M = (\Omega a \cos(\varphi) + u)a \cos(\varphi) \quad (3.12)$$

Si il existe un maximum M_{max} dans l'ouvert du domaine considéré, alors il existe une courbe fermée dans un voisinage sur laquelle M est constant inférieur strictement à M_{max} . Le terme de gauche intégré le long de cette courbe est nul en raison de l'équation de continuité (4). Le terme de droite sera strictement négatif car $\partial_z M \neq 0$ sur cette courbe. En conséquence, le maximum de M doit se situer sur la frontière du domaine.

Si le maximum se trouve en $z=H$, alors de la même façon, il existe une courbe sous la surface $z=H$ où M est constant et que l'on peut fermer le long de la surface où $u_n = w \equiv 0$. Comme précédemment, le terme de gauche intégré le long de cette courbe est nul, et le terme de droite est négatif $\partial_z M < 0$ sur la courbe intérieure et $\partial_z M = 0$ en $Z=H$ en raison des conditions aux limites choisies.

Enfin, on procède de même au sol en $z=0$, sauf que cette fois-ci, le terme de droite est négatif si $u > 0$ (car $\nu \partial_z u(z=0) = Cu(z=0)$). Si en revanche, $u \leq 0$, il est possible que l'intégrale du terme de droite soit nulle.

En conclusion, si il existe un maximum, alors, il se trouve au sol dans la région où le vent zonal est vers l'ouest. On a donc bien $M_{max} \leq \Omega a^2 \cos^2(\varphi) \leq \Omega a^2$, valeur de M à l'équateur avec $u=0$.

Chapitre 4

Vorticité potentielle

4.1 Approximation du ‘toit rigide’ et fonction de courant

L’approximation du ‘toit rigide’ (rigid lid en anglais) consiste à annuler la vitesse verticale de la surface du fluide. De façon équivalente, elle consiste à recouvrir le fluide d’un ‘couvercle’ qui exerce alors une pression à déterminer.

1. En partant de l’équation de continuité pour un fluide homogène, montrer qu’il existe une fonction de courant ψ pour le transport (vitesse intégrée sur la hauteur d’eau).
2. On considère l’équation de conservation de la vorticité potentielle pour un fluide homogène dans le plan β

$$\frac{d}{dt} \frac{f + \xi}{H} = 0.$$

Montrer que, si le fond est plat, la forme linéaire de cette équation est $\nabla^2 \psi_t + \beta \psi_x = 0$.

Corrigé

4.2 Conservation de la vorticité potentielle : franchissement d’un escarpement

Un courant verticalement uniforme mais cisaillé latéralement comme sur la figure 4.1 doit franchir un escarpement. En supposant que la vitesse s’annule au large, déterminer le profil de vitesse en calculant U_2 et L_2 . Comment est l’écoulement de part et d’autre de l’escarpement (faire un schéma en vue de dessus)? Que se passerait-il si la profondeur H_2 était inférieure à 100m (on répondra à cette question qualitativement)?

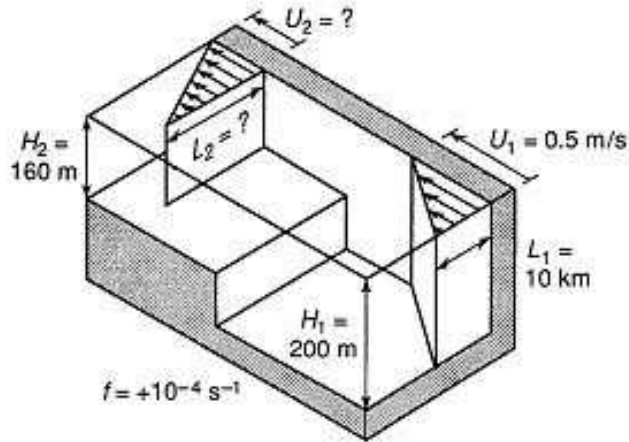


FIG. 4.1 – Franchissement d'un escarpement

Corrigé

Deux quantités sont conservées par l'écoulement : le débit (conservation de la masse ou du volume) et la vorticité potentielle :

$$U_1 H_1 L_1 = U_2 H_2 L_2 \quad (\text{débit} = H \int_0^L yU/L dy = 1/2 UHL) \quad (4.1)$$

$$\frac{f + U_1/L_1}{H_1} = \frac{f + U_2/L_2}{H_2} \quad (\text{car } \zeta = -\partial_y U = U/L) \quad (4.2)$$

On développe pour trouver $L_2^2 = \frac{U_1 H_1 L_1^2}{U_1 H_2^2 + f H_2 L_1 (H_2 - H_1)}$, ce qui numériquement donne $L_2 = 10^4 / \sqrt{0.32} \simeq 17 \text{ km}$ et $U_2 = 0.34 \text{ cm s}^{-1}$. Si H_2 vaut moins de 100m alors le dénominateur est négatif et il n'y a pas de solution si on fait bien sûr l'hypothèse que le profil en aval est bien celui de la figure. On peut supposer que, ou bien le courant se détache de la côte et suit l'escarpement, ou bien que le profil du courant en aval de l'escarpement change radicalement (voir l'exercice 'ondes de Rossby topographiques : ondes de Kelvin doubles' dans le TD suivant).

4.3 Franchissement d'un escarpement par un tourbillon

Refaire le même exercice avec un tourbillon isolé (il conserve son volume) en rotation solide de rayon R et de vorticité ω . Traiter les deux cas $\omega < 0$ et $\omega > 0$.

Conclure.

Corrigé

à faire

4.4 Ajustement géostrophique 1

Dans un repère tournant, on considère un fluide à deux couches de densité ρ_1 et ρ_2 ($\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 \ll \rho_2$), la deuxième couche restant toujours au repos. L'état initial est une bande infinie de section rectangulaire de largeur $2a$, de profondeur H parallèle à l'axe y . Quel est l'état final stationnaire à l'équilibre géostrophique? Etudier les deux cas limites $a \ll R$ et $a \gg R$, R étant le rayon de déformation basé sur l'épaisseur H du fluide à l'état initial? Quelle est la variation d'énergie mécanique entre l'état final et l'état initial? Conclure.

Corrigé

Il suffit d'écrire comme dans l'exercice "Franchissement d'un escarpement" que le volume et la vorticité potentielle sont conservés :

$$\int_0^{a_f} h(x) dx = aH \quad (4.3)$$

$$\frac{f + \zeta}{h} = \frac{f}{H} \quad (4.4)$$

a_f étant la position finale du front après ajustement $h(a_f) = 0$. Compte tenu de l'équilibre géostrophique $-fv = -g'\partial_x h$, on trouve $\frac{f-g'/f\partial_{xx}^2 h}{h} = \frac{f}{H}$. On garde seulement la solution symétrique en x , soit $h(x) = H[1 - \cosh(x/R)/\cosh(a_f/R)]$. a_f est déterminé grâce à la conservation du volume $a_f/R - \tanh(a_f/R) = a/R$. On peut seulement résoudre analytiquement dans les cas limites.

Cas $a \gg R$: $a_f = R+a$, c'est-à-dire que le front initial s'est déplacé exactement de R . Le centre du tourbillon a quasiment la même profondeur.

Cas $a \ll R$: $a_f = R\sqrt[3]{2a/R}$, où on a supposé que $a_f \ll R$, ce qui a posteriori n'est pas forcément vrai, mais seulement à l'ordre 1 en a_f/R . On vérifie néanmoins que $a_f \gg a$ et que $h(0) = H(a/R)^2 \ll H$, ce qui veut dire que la masse d'eau s'est beaucoup étalée avant de voir la rotation du repère.

4.5 Ajustement géostrophique 2

Dans un repère tournant, on considère un fluide homogène dont la surface à l'état initial est plane dans chaque demi-plan séparé par l'axe y et de cote $-\eta_0 \text{sign}(x)$, η_0 étant \ll devant H la profondeur moyenne. On laisse le fluide

s'ajuster. Quel est l'état final stationnaire à l'équilibre géostrophique ? Quelle est la variation d'énergie mécanique entre l'état final et l'état initial ? Commenter la solution et discuter l'intérêt général de ce modèle (et des autres similaires vus en cours ou dans le chapitre 13 du livre de Cushman-Roisin) dans le contexte des écoulements atmosphériques et océaniques. Donner des exemples.

Corrigé

à faire

Chapitre 5

Ondes de gravité. Ondes de Rossby

5.1 Ondes de gravité dans un canal

On modélise la Manche par un canal infini à fond plat de largeur L et profondeur H , le paramètre de Coriolis étant constant. Décrire toutes les ondes qui peuvent se propager dans ce canal. Discuter de l'intérêt de ce modèle pour la Manche (on prendra $L = 100\text{km}$, $H = 100\text{m}$, $f = 10^{-4}\text{s}^{-1}$, la période de la marée étant de $T = 12\text{h}$).

Corrigé

*On a vu en cours qu'il y a les deux ondes de Kelvin. Pour les ondes de Poincaré, la solution est immédiate à partir de l'équation de dispersion de ces ondes : $\omega = \sqrt{f^2 + R^2(k^2 + l^2)}$. Il faut écrire que l'onde doit satisfaire les conditions aux limites (vitesse normale nulle sur les bord du canal). Pour cela, il est nécessaire de prendre une combinaison linéaire de deux ondes : $\exp(i(kx + ly - \omega t)) + \exp(i(kx - ly - \omega t)) = 2\cos(ly)\exp(i(kx\omega t))$. Pour satisfaire les conditions au limites, il faut que $l_n L = \pi/2 + n\pi$. En conséquence, le nombre d'onde dans la direction y est discret. En adimensionnalisant ω par f et les longueurs (resp. les nombres d'onde) par R (resp. $1/Ri$) (R le rayon de déformation qui vaut 316 km), l'application numérique donne $k^2 + \pi^2/L^2(1/2 + n)^2 = 1$ qui n'a pas de solution. En conséquence, les seules ondes qui peuvent se propager avec une période de 12h sont les deux ondes de Kelvin. Leur longueur d'onde est alors de $12 * (86400/2) * \sqrt{gH} \simeq 1300\text{km}$. Pour la Manche, qui fait environ 500 km de long, cela veut dire que la marée met environ $4\text{h}30$ pour se propager de Brest à Calais.*

5.2 Ondes de Kelvin équatoriales

Trouver la solution des équations "Shallow water" dans le plan béta équatorial ayant une vitesse méridienne identiquement nulle. Comparer l'échelle spatiale de ces ondes avec le rayon de déformation trouvé par des arguments qualitatifs lors d'une précédente séance de TDs. Discuter des analogies avec l'onde de Kelvin côtière vue en cours. Que se passe-t-il lorsque une onde de Kelvin équatoriale atteint la côte du Pérou ?

Corrigé

On résout les équations suivantes qui diffèrent très peu du cas côtier :

$$\partial_t u = -g' \partial_x \eta \quad (5.1)$$

$$\beta y u = -g' \partial_y \eta \quad (5.2)$$

$$\partial_t \eta + H \partial_x u = 0 \quad (5.3)$$

La solution en (x,t) est inchangée par rapport au cas côtier : c'est une onde qui se propage à la vitesse $c_0 = \pm \sqrt{g'H}$. Sa structure en y est donnée par l'équation

$$\partial_y \eta + (\beta y / c_0) \eta = 0 \quad (5.4)$$

On ne peut garder que la solution bornée $\eta(y) = \exp(-y^2/R)$ ($R^2 = c_0/\beta$), qui correspond à $c_0 = \sqrt{g'H}$, c'est-à-dire l'onde qui se propage vers l'Est. L'équateur agit exactement comme une côte en guidant l'onde qui est piégée de par et d'autre de l'équateur sur une échelle $R = \sqrt{c_0/\beta}$, qui est bien la même expression que celle trouvée par des arguments qualitatifs. Quand cette onde arrive sur les côtes du Pérou, elle se transforme en 2 ondes de Kelvin côtières se propageant vers le nord et vers le sud, mais donne aussi des ondes de Rossby (voir cours suivant) qui elles se propagent vers l'ouest dans le Pacifique équatorial. Ce système d'ondes joue un rôle essentiel dans l'évolution du phénomène El Nino.

5.3 Onde de Rossby topographique : onde de Kelvin double

Montrer qu'une topographie comme celle de la figure 5.1 peut canaliser une onde de Rossby topographique ? On partira des équations générales en traitant deux cas : celui où on néglige $\partial_t \eta$ dans l'équation de continuité (on parle de l'approximation du 'toit rigide') et celui où on ne le néglige pas. Schématiser la solution. Quel est l'intérêt de l'approximation du 'toit rigide' ?

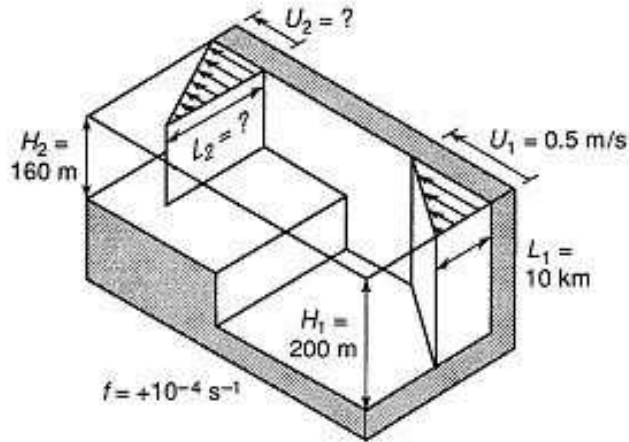


FIG. 5.1 – Topographie en marche d'escalier ('step like topography')

Corrigé

Pour traiter simultanément les deux cas, il suffit d'écrire les équations avec $\epsilon = 0$ ou 1 :

$$\partial_t u - f v = -g' \partial_x \eta \quad (5.5)$$

$$\partial_t v + f u = -g' \partial_y \eta \quad (5.6)$$

$$\epsilon \partial_t \eta + \partial_x H u + \partial_y H v = 0 \quad (5.7)$$

On résout facilement dans chaque demi-plan à l'aide de la transformation de Fourier car tous les coefficients des équations sont constants. Le raccordement des solutions en $x = 0$ se fait grâce à la continuité de η (soit $\eta(0-) = \eta(0+)$) et celle du transport (soit $H_1 u(0-) = H_2 u(0+)$), cette dernière relation donnant l'équation de dispersion. La continuité de η en $x = 0$ impose que le nombre d'onde selon y soit le même dans les 2 demi-plans. Tous calculs faits, il vient :

$$\epsilon(\omega^2 - f^2) = g H_j (k_j^2 + l^2), \quad j=1,2 \quad (\text{d'après l'éq. 5.7i}) \quad (5.8)$$

$$\omega = f l \frac{\Delta H}{H_2 k_2 - H_1 k_1} \quad (\text{continuité du transport}) \quad (5.9)$$

où $k_{1,2}$ est le nombre d'onde selon x de part et d'autre de l'escarpement et $\Delta H = H_2 - H_1$.

Le cas $\epsilon = 0$, vu en TD, donne facilement $k_2 = -k_1 = il$, l réel, pour avoir des

solutions bornées et qui se propagent selon y (la solution $k_{1,2}$ réel et l imaginaire serait parfaitement envisageable mais c'est une onde évanescence en y). De l'éq. 5.9, on déduit $\omega = f\Delta H/2H$ avec $2H = H_2 + H_1$. C'est bien une onde qui se propage en laissant les petites profondeurs sur la droite. Si $\alpha = \Delta H/2H \ll 1$, alors $\omega \ll f$, et il s'agit bien d'une onde de Rossby car elle est presque en équilibre géostrophique.

Le cas $\epsilon = 1$ est plus pénible. En résolvant les équations 5.8 et 5.9 pour ω , il vient deux solutions à l'ordre 2 en α

$$\omega_P^2/f^2 = 1 + R^2l^2 - (R^2l^2\alpha^2)/(1 + R^2l^2) \quad (5.10)$$

$$\omega_R^2/f^2 = (R^2l^2\alpha^2)/(1 + R^2l^2) \quad (5.11)$$

Ondes de Poincaré. La solution ω_P correspond à une onde de Poincaré se propageant selon y , reconnaissable à la forme de la relation de dispersion. Des relations 5.10 et 5.9, on déduit $k_2 = iRl\alpha/(1 + R^2l^2)$. Cette onde est piégée de part et d'autre de l'escarpement.

Ondes de Rossby. La solution ω_R correspond à l'onde de Rossby déjà trouvée, avec la même fréquence $\omega = f\alpha$ pour les petites longueurs d'onde $lR \gg 1$, mais qui diffère pour les grandes longueurs d'onde $lR \ll 1$. Comme précédemment, on déduit $k_2 = i\sqrt{1 + R^2l^2}/R$ et on retrouve bien $k_2 = il$ pour les petites longueurs d'onde $lR \gg 1$. La dénomination 'Onde de Kelvin double' qui est employée dans la littérature océanographique est trompeuse : l'onde est bien piégée par un escarpement, comme l'onde de Kelvin côtière, mais l'analogie s'arrête là.

L'approximation du toit rigide a des avantages et des inconvénients. En effet, elle filtre les ondes de gravité (de Poincaré) qui sont des phénomènes rapides $\omega > f$, ce qui peut être intéressant lors d'un calcul numérique où le pas de temps est limité par le critère CFL (voir cours MF203) : $\Delta t < \Delta x/c$, c étant la vitesse des ondes de Poincaré qui est au moins égale à \sqrt{gH} . En revanche, l'approximation du 'toit rigide' distord le diagramme de dispersion des ondes de Rossby pour les grandes longueurs d'ondes car ω y est constante alors que en réalité elle tend linéairement vers zéro avec le nombre d'onde.

5.4 Effet β sur une plaque tournante

La cuve cylindrique utilisée par Peter Rhines pour faire les expériences sur les ondes de Rossby vues en cours a un diamètre D (pour l'application numérique on prendra $D = 1m$). Elle est posée sur une table qui tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à la vitesse angulaire Ω . Elle est remplie d'eau douce qui se trouve au repos dans le repère de la table. La profondeur d'eau moyenne est H . Calculer le gradient de vorticité potentielle ambiante $f/h = 2\Omega/h$, h étant la hauteur d'eau à la distance r du centre de la cuve. Pour simplifier, on négligera les variations de h devant H .

Corrigé

à faire

5.5 Ondes de Rossby stationnaires

On part des résultats de l'exercice 5.4.

On dispose maintenant un obstacle près du bord de la cuve et on fait varier la vitesse de rotation de la table de $\delta\Omega$ de façon à créer un courant dans la cuve qui rencontre cet obstacle, ce qui va engendrer des ondes de Rossby. Déterminer la vitesse de phase de ces ondes qui sont entraînées par le courant (on négligera la courbure de la paroi de la cuve et on utilisera la formule vue en cours en coordonnées cartésiennes). Quelle est la variation de vitesse angulaire maximum pour que l'on puisse avoir des ondes stationnaires ? Déterminer cette variation pour avoir une onde stationnaire de longueur d'onde L égale à $\pi D/4$ (on prendra le nombre d'onde transversal l égal à zéro). Bien préciser le signe de $\delta\Omega$.

Pour l'application numérique, on déterminera la profondeur H , Ω et $\delta\Omega$. Il y a bien sûr plusieurs choix possibles.

Corrigé

à faire

5.6 Ondes de Rossby atmosphériques planétaires

Un enregistrement de la pression atmosphérique au sol présente un fort pic à la période de 1/2 an (on parle du cycle annuel) et que ce signal correspond à des ondes de Rossby planétaires barotropes. Quelle est la gamme de leur longueur d'onde zonale ? On supposera que le rayon de déformation vaut 1000 km et que β vaut $2 \cdot 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$.

Corrigé

Il suffit de réécrire la relation de dispersion $\omega = -\beta k / (1 + K^2 R^2)$ sous la forme

$$(k - k_0)^2 + l^2 = k_m^2 \text{ avec } k_0 = -\frac{\beta}{2\omega} \text{ et } k_m = \sqrt{\frac{\beta^2}{4\omega^2} - \frac{1}{R^2}}$$

d'où on déduit facilement $k_0 - k_m \leq k \leq k_0 + k_m$. L'application numérique (on utilise le fait que $1/R \ll \beta/2\omega$ soit $2k_0 \leq k \leq 1/(2R^2 k_0)$) donne $2 \cdot 10^{-8} \leq k \leq 5 \cdot 10^{-5}$ (attention k est négatif car la propagation est vers l'ouest) soit une longueur d'onde L comprise entre $125 \text{ km} \leq L \leq 3.1 \cdot 10^5 \text{ km}$. A noter que la borne supérieure est largement supérieure au diamètre de la terre.

5.7 Onde de Rossby dans un canal

Dans un canal de largeur L à deux couches de fluide (la deuxième couche étant au repos), on considère un écoulement uniforme de vitesse U . Montrer qu'une onde de Rossby superposée à l'écoulement peut exister. Quel est son sens de propagation ?

Corrigé

Voir le complément de cours sur les ondes de Rossby.